سے جو فاصلے ہیں اُن کے لیے جملے معلوم کر سکتے ہیں۔

(۱) و آ معلوم کرنا ۔ فرض کرو و آ = ضہ تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{ضہ}^{2} = \text{ا و}^{2} + \text{ا آ}^{2} - 2\,\text{ا و} \times \text{ا آ}\,.\,\text{جم و ا آ}$$

اس لیے

$$\text{ضہ}^{2} = \text{ر}^{2}\Big[1 + 16\,\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج} - 8\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج} \times \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج})\Big]$$

یا

$$\text{ضہ}^{2} = \text{ر}^{2}\left(1 - 8\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)$$

پس ہمیں آئیلر کا ضابطہ

$$\text{ضہ}^{2} = \text{ر}^{2} - 2\,\text{ر}\,\text{ر}' \quad \ldots \quad (۱۵)$$

حاصل ہوتا ہے

(۲) و آ۱ معلوم کرنا ۔ فرض کرو و آ۱ = ضہ۱ تو

$$\text{ضہ}_{1}^{2} = \text{ر}^{2}\Big[1 + 16\,.\,\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,.\,\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج} - 8\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج})\Big]$$

یا

$$\text{ضہ}_{1}^{2} = \text{ر}^{2}\left(1 + 8\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)$$

جس سے حاصل ہوتا ہے ضہ۲ = ر۲ + ۲ ر ر ۱ ...(۱۶)

(۳) و پ معلوم کرنا۔ مثلث و ا پ سے حاصل ہوتا ہے

و پ۲ = و ا۲ + ا پ۲ − ۲ و ا × ا پ جم و ا پ

یا و پ۲ = ر۲ [۱ + ۴ جم۲ ا − ۴ جم ا جم (ب − ج)]

جس سے حاصل ہوتا ہے و پ۲ = ر۲ (۱ − ۸ جم ا جم ب جم ج) ...(۱۷)

(۴) آ پ معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

آ پ۲ = ۴ ر۲ جم۲ ا + ۱۶ ر۲ جب۲ ½ ب جب۲ ½ ج

− ۱۶ ر۲ جم ا جب ½ ب جب ½ ج جم ½ (ب − ج)

اس لیے آ پ۲ = ۴ ر۲ { جم۲ ا + (۱ − جم ب) (۱ − جم ج) − جم ا جب ب جب ج

− جم ا (۱ − جم ب) (۱ − جم ج) }

یا آ پ۲ = ۴ ر۲ { (۱ − جم ا) (۱ − جم ب) (۱ − جم ج) − جم ا جم ب جم ج }

...(۱۸)

یا آ پ۲ = ۲ ر۱۲ − ۴ ر۲ جم ا جم ب جم ج

(۵) آ ع معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

آ ع۲ = ½ آ پ۲ + ½ آ و۲ − ¼ و پ۲ ؛

اس لیے آ ع۲ = ر۱۲ + ½ ر۲ − ر ر۱ − ¼ ر۲ = (½ ر − ر۱)۲

اس لیے آ ع = ½ ر − ر۱

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ آ۱ ع = ½ ر + ر۱ ؛ اب چونکہ ½ ر

(200)

نو نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے آع، آع کے لیے جو جملے ہم نے حاصل کیے ہیں اُن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اندرونی اور جانبی دائرے نو نقطی دائرہ کو مس کرتے ہیں۔ پس فیورباک (Feuerbach) کا مسئلہ علم مثلث کے ذریعہ ثابت ہو چکا۔ اس مسئلہ کے متعدد ہندسی ثبوت دیے جاتے ہیں۔

مثالیں

(۱) اگر جانبی دائروں کے مرکزوں سے حائط دائرہ کے مماس کھینچے جائیں اور ان کے طول ج، ج، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج_۱^۲} + \frac{1}{ج_۲^۲} + \frac{1}{ج_۳^۲} = \frac{ا + ب + ج}{ا ب ج}$$

(۲) ثابت کرو کہ مثلث آ و پ کا رقبہ ہے

$$-۲ ر^۲ \text{جب} \tfrac{1}{2}(ب - ج) \text{جب} \tfrac{1}{2}(ج - ا) \text{جب} \tfrac{1}{2}(ا - ب)$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$ث آ^۲ = \tfrac{16}{3} ر^۲ \{ \Sigma \text{جب}^۲ \tfrac{1}{2} ب \text{جب}^۲ \tfrac{1}{2} ج - \tfrac{1}{12} \Sigma \text{جب}^۲ ا \}$$

$$\text{اور}\quad ث آ^۲ + ۴ ر ر = \tfrac{1}{3}(ب ج + ج ا + ا ب) - \tfrac{1}{9}(ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)$$

(۴) ثابت کرو کہ

$$و پ^۲ = \frac{\Sigma ا^۲ (ا^۲ - ب^۲)(ا^۲ - ج^۲)}{(۴ س)^۲}$$

(۵) اگر راسوں سے نو نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلے ع، ب، ج ہوں اور مرکزِ عمودی سے اس کا فاصلہ ث ہو تو ثابت کرو کہ

$$ع^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + ث^{۲} = ۳\, ر^{۲}$$

(۶) ثابت کرو کہ نونقطی دائرہ حائط دائرہ کو قطع نہیں کرتا اِلّا اُس صورت کے جبکہ مثلث کا ایک زاویہ منفرجہ ہو اور اِس صورت میں یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ

$$جم^{-۱}\ (۱ + ۲ . جم ا . جم ب . جم ج)$$

پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) اگر حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کے درمیان فاصلہ $\frac{۱}{۲}$ ر ہو تو ثابت کرو کہ یا مثلث قائم الزاویہ ہے، یا مس ب مس ج = ۹

(۸) اگر نونقطی دائرہ کا مرکز ق ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ق آ_{۲} - ق آ_{۳})(ق آ - ق آ_{۱}) = ب^{۲} - ج^{۲}$$

(۹) اگر و آ پ ایک تساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

$$جم ا + جم ب + جم ج = \frac{۳}{۲}$$

(۱۰) اگر اندرونی دائرہ کا مرکز، حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی سے تساوی الفصل ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° ہے۔

مثلث کے رقبہ کے لیے جملے

۱۵۹ ——— مثلث کے رقبہ کے لیے اس سے متعلق مختلف خطوط اور زاویوں کی رقوم میں، جملوں کی ایک بہت بڑی تعداد معلوم ہو چکی ہے۔ ایسے بہت سے ضابطے Mathesis, Vol III میں اور Annals of math. Vol. I. No.6 میں ملینگے۔

ان میں سے چند ضابطے ہم ذیل میں درج کرتے ہیں اور ان کی تصدیق کا کام طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں:-

$ما = \sqrt{ر\, ر_{۱}\, ر_{۲}\, ر_{۳}}$ ، (۲) $ما = \frac{۱}{۲} \sqrt{س\, ع_{۱}\, ع_{۲}\, ع_{۳}}$ ، (۳) $ما = \frac{۴}{۳} \sqrt{ش (ش - م_{۱}) (ش - م_{۲}) (ش - م_{۳})}$

(201)

جہاں م_1، م_2، م_3 خطوط وسطی ہیں اور ۲ ث = $\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3$ ، (۴) $\dfrac{\text{س}^2}{\sum \text{مم} \frac{1}{2} \text{ا}}$ ،

(۵) $\dfrac{\text{ف جم} \frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج}) + \text{گ جم} \frac{1}{2}(\text{ج} - \text{ا}) + \text{ھ جم} \frac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})}{2(\text{ف}^{-1} \text{جم} \frac{1}{2} \text{ا} + \text{گ}^{-1} \text{جم} \frac{1}{2} \text{ب} + \text{ھ}^{-1} \text{جم} \frac{1}{2} \text{ج})}$ ،

جہاں ف، گ، ھ زاویوں کے ناصف ہیں۔

(۶) $\text{ر}^2 \text{ مم} \frac{1}{2} \text{ا مم} \frac{1}{2} \text{ب مم} \frac{1}{2} \text{ج}$ ، (۷) $\text{ر}_1^2 \text{ مم} \frac{1}{2} \text{ا} + 2 \text{ ر ر جب ا}$ ،

(۸) $\text{ر}_2 \text{ر}_3 \text{ مس} \frac{1}{2} \text{ا}$ ، (۹) $\text{ر ر}_1 \dfrac{\text{ر}_2 - \text{ر}_3}{\text{ب} - \text{ج}}$ ، (۱۰) $\text{ر}_1 \text{ر}_2 \sqrt{\dfrac{4 \text{ ر ر} - (\text{ر}_1 + \text{ر}_2)}{\text{ر}_1 + \text{ر}_2}}$

مثلثوں کے مختلف خواص

۱۶۰ ——— اگر مثلث ا ب ج کے مستوی میں کوئی نقطہ ق ہو تو ہمیں متماثلہ رشتہ

$$\triangle \text{ ق ب ج} + \triangle \text{ ق ج ا} + \triangle \text{ ق ا ب} \equiv \triangle \text{ ا ب ج}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ اُن مثلثوں کے رقبے جن کا راس ق ہے واجب علامت کے ساتھ لیے جائیں؛ مثلاً △ ق ب ج منفی ہوگا اگر ق اور ا، ب ج کی مخالف جانبوں میں واقع ہوں۔ ق کو مختلف مقامات پر لینے سے مثلث کے زاویوں کے درمیان مختلف مشہور رشتے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ق، و پر منطبق ہوتا ہے تو متذکرہ صدر رشتہ ہو جاتا ہے

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

کیونکہ زاویے ب و ج، ج و ا، ا و ب علی الترتیب ۲ ا، ۲ ب، ۲ ج ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ ق، آپر ہے تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

جب ۱/۲ ا جب ۱/۲ (ب + ج) + جب ۱/۲ ب جب ۱/۲ (ج + ا)

+ جب ۱/۲ ج جب ۱/۲ (ا + ب) = ۲ جم ۱/۲ ا جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ ج

(۳) فرض کرو کہ ق، ع پر ہے تو

جب ا جم (ب ـ ج) + جب ب جم (ج ـ ا) + جب ج جم (ا ـ ب)

= ۴ جب ا جب ب جب ج

۱۶۱ ـــــ دفعہ سابق کا مماثلہ رشتہ جو ایک مستوی میں کے کسی چار نقطوں ا، ب، ج، ق کے باہمی چھ فاصلوں کے درمیان قائم رہتا ہے متعدد شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) مساوات ∆ ق ب ج + ∆ ق ج ا + ∆ ق ا ب = ∆ ا ب ج

کو استعمال کرنے اور ان چار مثلثوں میں سے ہر مثلث کے رقبہ کو اس کے ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ ایک ایسی شکل میں ملتا ہے جس میں چار جذر المربع شامل ہوتے ہیں۔

(۲) اُسی ربط کو منطق شکل میں حاصل کرنا ہو تو زاویوں ب ق ج، ج ق ا، ا ق ب کو علی الترتیب عہ، بہ، جہ سے تعبیر کرو تو چونکہ عہ + بہ + جہ = ۲π ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ـ جم^۲ عہ ـ جم^۲ بہ ـ جم^۲ جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ = ۰

اب جم عہ کی بجائے اس کی قیمت (ق ب^۲ + ق ج^۲ ـ ب ج^۲) / ۲ ق ب . ق ج درج کرنے سے اور علیٰ ہذا جم بہ اور جم جہ کی بجائے ان کی متناظر قیمتیں رکھنے سے ہمیں مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۶۲ ـــــ کسی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی عام رشتہ لیکر اس سے دوسرا رشتہ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر ان ضلعوں اور

زاویوں کی بجائے مثلث پائیں کے متناظر ضلع اور زاویے رکھے جائیں۔
اِس مثلث کے ضلع اور زاویے دفعہ ۱۵۷ (۱۴) میں دیے گئے ہیں اور
اس لیے ہم دیے ہوئے رشتہ میں ا، ب، ج کی بجائے ا جم ا، ب جم ب،
ج جم ج اور زاویوں ا، ب، ج، کی بجائے π - ۲ ا، π - ۲ ب،
π - ۲ ج رکھ سکتے ہیں۔
اس استحالہ کی ایک مثال یہ ہے :- ہم رشتہ ا۲ = ب۲ + ج۲ - ۲ ب ج جم ا
سے واقف ہیں، اس میں متذکرہ صدر اندراجات کرنے سے ہمیں نیا رشتہ
حاصل ہوتا ہے

ا۲ جم۲ ا = ب۲ جم۲ ب + ج۲ جم۲ ج + ۲ ب ج جم ب جم ج جم ۲ ا

استحالہ کے اِس طریقے کی توسیع عمل میں آسکتی ہے اگر ہم ن واں مثلث پائیں
لیں جس کے ضلع ہیں

(−۱)^(ن−۱) ا جم ا جم ۲ ا جم ۴ ا .... جم ۲^(ن−۱) ا،
(−۱)^(ن−۱) ب جم ب جم ۲ ب جم ۴ ب .... جم ۲^(ن−۱) ب،
(−۱)^(ن−۱) ج جم ج جم ۲ ج جم ۴ ج .... جم ۲^(ن−۱) ج،

اور جس کے زاویے

⅓ (۲^ن + ۱) π − ۲^ن ا، ⅓ (۲^ن + ۱) π − ۲^ن ب، ⅓ (۲^ن + ۱) π − ۲^ن ج

ہیں اگر ن طاق ہے، لیکن

− ⅓ (۱ − ۲^ن) π + ۲^ن ا، − ⅓ (۱ − ۲^ن) π + ۲^ن ب، ⅓ (۱ − ۲^ن) π + ۲^ن ج

ہیں اگر ن جفت ہے۔
پس مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کسی رشتہ

(203)

ہیں ہم ر کی بجائے

$(-۱)^{ن-۱}$ ر جم ۱ جم ۲ ۱ ۔ ۔ ۔ جم $۲^{ن-۱}$ ۱

اور زاویہ ۱ کی بجائے $\frac{۱}{۳}(\frac{ن}{۲}+۱)\pi - \frac{ن}{۲}$ ۱، یا $\frac{ن}{۲}$ ۱ $- \frac{۱}{۳}(\frac{ن}{۲}-۱)\pi$ لکھ سکتے ہیں (بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت) مع دیگر ضلعوں اور زاویوں کی بجائے ان کے تناظر جملوں کے۔

۱۶۳ ــــــــ مثلث کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کے درمیان کسی عام رشتہ میں زاویوں ۱، ب، ج کی بجائے علی الترتیب پ ۱ + ق ب + ر ج، ق ۱ + ر ب + پ ج، ر ۱ + پ ب + ق ج لکھا جا سکتا ہے جہاں پ، ق، ر کوئی عدد ہیں ایسے کہ پ + ق + ر کی شکل ۶ ن - ۱ ہے یا ۶ ن + ۲ اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے؛ لیکن یہ استحالہ عمل میں آ سکتا ہے بشرطیکہ تمام جیوب کی علامتیں بدل دیجائیں جبکہ پ + ق + ر کی شکل ۶ ن - ۱ ہو اور تمام جیوب التمام کی علامتیں بدل دیجایں جبکہ پ + ق + ر کی شکل ۶ ن + ۲ ہو۔

یہ مسئلہ اِن واقعات سے مستنبط ہوتا ہے کہ پہلی صورت میں زاویوں

۲ ن π - (پ ۱ + ق ب + ر ج)، ۲ ن π - (ق ۱ + ر ب + پ ج)،

۲ ن π - (ر ۱ + پ ب + ق ج)

کا مجموعہ π ہے اور دوسری صورت میں زاویوں

(۲ ن + ۱) π - (پ ۱ + ق ب + ر ج)، (۲ ن + ۱) π - (ق ۱ + ر ب + پ ج)، (۲ ن + ۱) π - (ر ۱ + پ ب + ق ج) کا مجموعہ π ہے

ذو اربعۃ الاضلاعوں کے خواص

۱۶۴ ــــــــ فرض کرو کہ ۱ ب ج د ایک محدب ذو اربعۃ الاضلاع

(204)

ہے۔ ضلعوں اب، ب ج، ج د، د ا کو علی الترتیب ا، ب، ج، د سے اور وتروں ا ج، ب د کو علی الترتیب لا، ما سے تعبیر کرو، نیز فرض کرو کہ ا + ج = ۲عہ اور فہ = وتروں کا درمیانی زاویہ۔

ہم ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ س کے لیے ایک جملہ ا، ب، ج، د اور عہ کی رقوم میں معلوم کرینگے۔ چونکہ

ما۲ = ا۲ + د۲ − ۲ ا د جم ا = ب۲ + ج۲ − ۲ ب ج جم ج،

اس لیے ا د جم ا − ب ج جم ج = ½ (ا۲ + د۲ − ب۲ − ج۲)

نیز ا د جب ا + ب ج جب ج = ۲ س

اِن مساواتوں کی تتناظر طرفوں کا مربع لو اور جمع کرو تو

ا۲ د۲ + ب۲ ج۲ − ۲ ا ب ج د جم ۲ عہ = ۴ س۲ + ¼ (ا۲ + د۲ − ب۲ − ج۲)۲

پس ۱۶ س۲ = ۴ (ا د + ب ج)۲ − (ا۲ + د۲ − ب۲ − ج۲)۲ − ۱۶ ا ب ج د جم۲ عہ،

یا ۱۶ س۲ = {(ا + د)۲ − (ب − ج)۲} {(ب + ج)۲ − (ا − د)۲}

− ۱۶ ا ب ج د جم۲ عہ،

اس لیے س۲ = (س − ا) (س − ب) (س − ج) (س − د)

− ا ب ج د جم۲ عہ، ....(۱۹)

جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د

اُس ذواربعۃ الاضلاع کی صورت میں جس کے گرد ایک دائرہ

کھینچا جا سکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

۲ ع = ۲۲

اس لیے س۲ = (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د) .... (۲۰)

جملہ (۱۹) سے یہ ظاہر ہے کہ وہ ذو اربعۃ الاضلاع جس کے ضلع دیے گئے ہوں بڑے سے بڑے رقبہ والا ہوگا جبکہ ع = ½ ۲۲، یعنی جبکہ ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے۔

مسئلہ (۲۰) کو برہما گپتا (Brahmequpta) نے، جو چھٹی صدی عیسوی میں ایک ہندو مہندس گزرا ہے، دریافت کیا تھا۔

۱۶۵ —— ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے لیے ایسے جملے معلوم کیے جا سکتے ہیں جن میں وتروں کے طول اور ان کا درمیانی زاویہ شامل ہوں۔

ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ اُن چار مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے جن میں یہ ذو اربعۃ الاضلاع وتروں سے تقسیم ہوتا ہے۔ اب چونکہ ان میں سے ہر مثلث کا رقبہ

= ½ × وتروں کے اُن دو مقطوعوں کا حاصلِ ضرب جو مثلث کے ضلع ہیں × جب فہ

جہاں فہ، وتروں کا درمیانی زاویہ ہے اس لیے چاروں مثلثوں کے رقبوں کو جمع کرنے سے

من = ½ لا ما جب فہ . . . . (۲۱)

نیز چونکہ ۲ و ا × و ب جم فہ = و ا۲ + و ب۲ - ا۲،

۲ و ج × و د جم فہ = و ج۲ + و د۲ - ج۲،

۲ و ا × و د جم فہ = د۲ - و ا۲ - و د۲،

۲ و ب × و ج جم فہ = ب۲ - و ب۲ - و ج۲،

اس لیے $\quad ۲\,لا\,ما\,جم\,فہ = ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲$ . . . (۲۲)

(205)

اس لیے $\quad س = \frac{۱}{۴}(ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲)\,مس\,فہ$ ، . . . . (۲۳)

اور فہ کو ساقط کرنے سے ہمیں بریٹشنیڈر (Bretschneider) کا ضابطہ

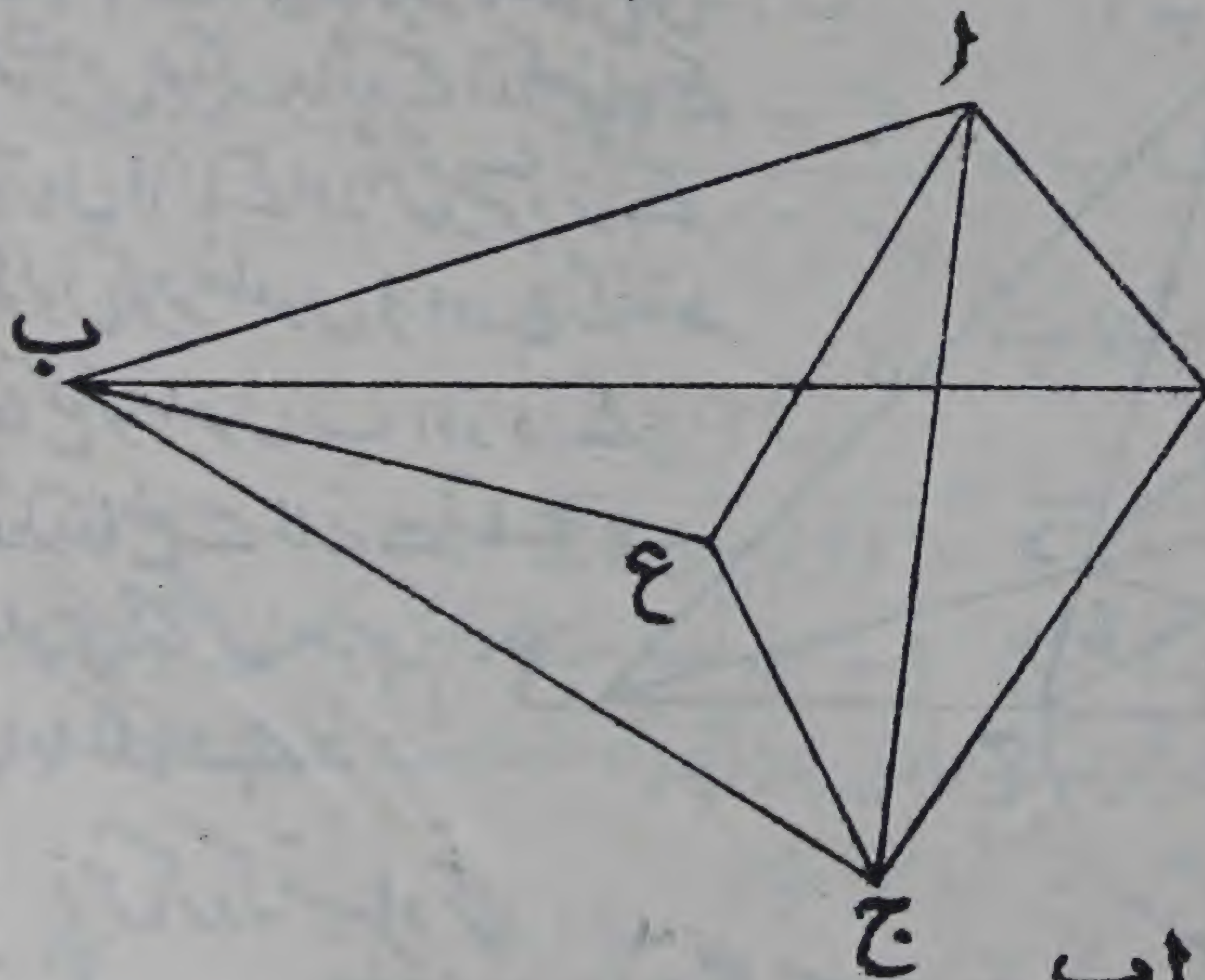
$$س = \frac{۱}{۴}\{۴\,لا^۲\,ما^۲ - (ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}$$ ، . . . (۲۴)

حاصل ہوتا ہے جو ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ کو ضلعوں اور وتروں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اگر ذواربعۃ الاضلاع میں ایک دائرہ بنایا جاسکے تو $ا + ج = ب + د$، اس لیے ضابطے (۲۳) اور (۲۴) ہو جاتے ہیں

$$س = \frac{۱}{۲}(اج - ب\,د)\,مس\,فہ ،$$

اور $$س = \frac{۱}{۲}[لا^۲\,ما^۲ - (اج - ب\,د)^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۶۶ — ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں کے حاصل ضرب کے لئے ایک جملہ، ضلعوں اور دو متقابلہ زاویوں کے حاصل جمع کی جیب التمام کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ب اور ج سے خطوط مستقیم ب ع اور ج ع کھینچو ایسے کہ زاویے ج ب ع، ب ج ع علی الترتیب زاویوں اب د، ا د ب کے مساوی ہوں۔ مثلث ع ج ب، اب د متشابہ ہیں، اس لئے

$$\frac{ا\,د}{ج\,ع} = \frac{ب\,د}{ج\,ب} = \frac{ا\,ب}{ب\,ع}$$

اس طرح   ا د × ج ب = ب د × ج ع

نیز چونکہ زاویئے ج ب د، ا ب ع مساوی ہیں اور

ا ب : ب ع = ب د : ب ج

اس لیے مثلث ا ب ع، ج ب د متشابہ ہیں اور اس لیے

ا ب × ج د = ب د × ا ع

اب چونکہ ا ج^{2} = ا ع^{2} + ع ج^{2} − ۲ ا ع × ع ج جم (ا + ج)

اس لیے ب د^{2} سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا^{2} ما^{2} = ا^{2} ج^{2} + ب^{2} د^{2} − ۲ ا ب ج د جم ۲ عہ، . . . (۲۵)

اگر ۲ عہ = π تو ٹولمی کا مسئلہ لا ما = ا ج + ب د حاصل ہوتا ہے. جو ایسے ذو اربعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے. جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے۔

اگر ۲ عہ = $\frac{1}{2}\pi$ تو لا^{2} ما^{2} = ا^{2} ج^{2} + ب^{2} د^{2} جو ایسے ذو اربعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جس میں دو متقابلہ زاویوں کا حاصل جمع ایک زاویہ قائمہ ہو۔

۱۶۷ — اُس ذو اربعۃ الاضلاع کی صورت میں جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے وتروں لا، ما کے اور اُس تیسرے وتر کے طولوں کو جو ضلعوں ا اور ج کے نقطہ تقاطع کو ضلعوں ب اور د کے نقطہ تقاطع سے ملانے سے بنتا ہے ضلعوں کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ تیسرا وتر ف گ ہے اور ا ج، ب د، ف گ کے طول علی الترتیب لا، ما، ی سے تعبیر ہوتے

(207)

ہیں۔ تب چونکہ

$$\text{لا}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{ا ب جم ب}،$$

اور

$$\text{لا}^2 = \text{ج}^2 + \text{د}^2 - 2\,\text{ج د جم د}،$$

اس لیے

$$\text{لا}^2 \left(\frac{1}{\text{ا ب}} + \frac{1}{\text{ج د}} \right) = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ا ب}} + \frac{\text{ج}^2 + \text{د}^2}{\text{ج د}}$$

پس

$$\text{لا}^2 = (\text{ا ج} + \text{ب د})(\text{ا د} + \text{ب ج}) \Big/ (\text{ا ب} + \text{ج د})، \quad \ldots (۲۶)$$

اور اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\text{ما}^2 = (\text{ا ج} + \text{ب د})(\text{ا ب} + \text{ج د}) \Big/ (\text{ا د} + \text{ب ج})،$$

نیز چونکہ

$$\text{ف ا} = \text{ا د}\, \frac{\text{جب د}}{\text{جب}\,(\text{ا} + \text{د})} = \frac{\text{د لا}}{\text{ما جم د} + \text{لا جم ا}}$$

اور اسی طرح

$$\text{ف ب} = \frac{\text{ب ما}}{\text{ما جم د} + \text{لا جم ا}}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ف ا}}{\text{د لا}} = \frac{\text{ف ب}}{\text{ب ما}} = \frac{\text{ف ب} - \text{ف ا}}{\text{ب ما} - \text{د لا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب ما} - \text{د لا}}$$

پس

$$\text{ف ا} \times \text{ف ب} = \frac{\text{ا}^2\,\text{ب د لا ما}}{(\text{ب ما} - \text{د لا})^2}؛$$

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے

$$\text{گ ج} \times \text{گ ب} = \frac{\text{ب}^2\,\text{ا ج لا ما}}{(\text{ا ما} - \text{ج لا})^2}$$

اب چونکہ ف گ پر کا مربع، ف اور گ سے دائرہ تک کھینچے ہوئے مماسوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دیکھو Mc Dowell's *Geometry* صفحہ ۹۲)، اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ی}^2 = \text{لا ما} \left\{ \frac{\text{ا}^2\,\text{ب د}}{(\text{ب ما} - \text{د لا})^2} + \frac{\text{ب}^2\,\text{ا ج}}{(\text{ا ما} - \text{ج لا})^2} \right\}$$

اب $لا^2$ اور $ما^2$ کی اُن قیمتوں سے جو اوپر حاصل ہو چکی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{ا د + ب ج} = \frac{ما}{ا ب + ج د} = \frac{ب ما - د لا}{ا (ب^2 - د^2)} = \frac{ا ما - ج لا}{ب (ا^2 - ج^2)}$$

اس لیے $ی^2$ کے مندرجہ بالا جملہ میں اندراج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ی^2 = (ا د + ب ج)(ا ب + ج د)\left\{\frac{ب د}{(ب^2 - د^2)^2} + \frac{ا ج}{(ا^2 - ج^2)^2}\right\} \quad ...(۲۷)$$

مثالیں

(۱) اگر ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{(ا ب + ج د)(ا ج + ب د)(ا د + ب ج)}{(س - ا)(س - ب)(س - ج)(س - د)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(۲) ثابت کرو کہ نصف قطر کے دائرہ کے مرکز اور اس دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع کے درمیان فاصلہ ہے

$$\frac{ر}{(ا ب + ج د)(ا د + ب ج)}\left[(ا ج + ب د)\left\{ا ج (ب^2 - د^2)^2 + ب د (ا^2 - ج^2)^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(۳) ثابت کرو کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذو اربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے سے ذیل کے زاویہ پر ملتے ہیں

$$جم^{-1}\frac{(ا^2 + ج^2) - (ب^2 + د^2)}{2 (ا ج + ب د)} \text{ یا } 2\, مس^{-1}\left\{\frac{(س - ب)(س - د)}{(س - ا)(س - ج)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اور نیز ثابت کرو کہ ایک وتر کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہے

$$\frac{ا ب ج د (ا ج + ب د)}{(ا ب + ج د)(ا د + ب ج)}$$

(208)

(۴) اگر ایک ذوار بعتہ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اس کا رقبہ س ہو تو ثابت کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\left\{\frac{۴\,\text{س}}{(\text{ب}^۲ - \text{د}^۲)(\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲)} \times \frac{(\text{اد} + \text{ب ج})(\text{اب} + \text{ج د})}{\text{ا ج} + \text{ب د}}\right\}$$

پر ملتے ہیں۔

(۵) اگر ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذوار بعتہ الاضلاع کے تین وتروں میں سے دو دو کے نقاطِ تقاطع ع، ف، گ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ع ف گ کے رقبہ کو ذوار بعتہ الاضلاع کے رقبہ سے نسبت ہے

$$\text{ا}^۲\text{ب}^۲\text{ج}^۲\text{د}^۲ : (\text{ا}^۲\text{ب}^۲ - \text{ج}^۲\text{د}^۲)(\text{ا}^۲\text{د}^۲ - \text{ب}^۲\text{ج}^۲)$$

(۶) ثابت کرو کہ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے

$\sqrt{\text{اب ج د}}\ \text{جیب}\ \frac{1}{۲}(\text{ا} + \text{ج})$ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{ا د}}\ \text{جیب}\ \frac{1}{۲}\,\text{ا} = \sqrt{\text{ب ج}}\ \text{جیب}\ \frac{1}{۲}\,\text{ج}$

(۷) اگر چار خطوط مستقیم دیئے جائیں تو اِن سے تین جداگانہ ذوار بعتہ الاضلاع بنائے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک دائرہ میں کھینچا جا سکتا ہے، ان کے رقبے مساوی ہوتے ہیں؛ اِن کے وہ چھ وتر جو دائرہ کے اندر متقاطع ہوتے ہیں زوج زوج مساوی ہوتے ہیں؛ اور اگر اِن خطوں کے طول عہ، بہ، جہ ہوں اور مشترک رقبہ س اور دائرہ کا نصف قطر سا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{سا} = \frac{\text{عہ بہ جہ}}{۴\,\text{س}}$$

(۸) دو مثلثوں کے رقبوں کا فرق جن کے قاعدے ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے ضلع ب، د ہیں اور جن کے راس ذوار بعتہ الاضلاع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع پر منطبق ہوتے ہیں حسب ذیل ہوگا

$$\frac{1}{۴}\sqrt{۴\,\text{ا}^۲\text{ج}^۲ - (\text{ل}^۲ + \text{م}^۲ - \text{ب}^۲ - \text{د}^۲)^۲}$$

(۹) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایسا ہو کہ وہ سب مستطیل جو اس کے گرد کھینچے جا سکتے ہیں متشابہ ہیں تو ثابت کرو کہ $ا^2 + ج^2 = ب^2 + د^2$

(۱۰) ایک ذواربعۃ الاضلاع ایسا ہے کہ ایک دائرہ اس کے گرد کھینچا جا سکتا ہے اور دوسرا اس کے اندر؛ ثابت کرو کہ اس دوسرے دائرہ کا نصف قطر $\frac{2\sqrt{ا ب ج د}}{ا + ب + ج + د}$ ہے۔

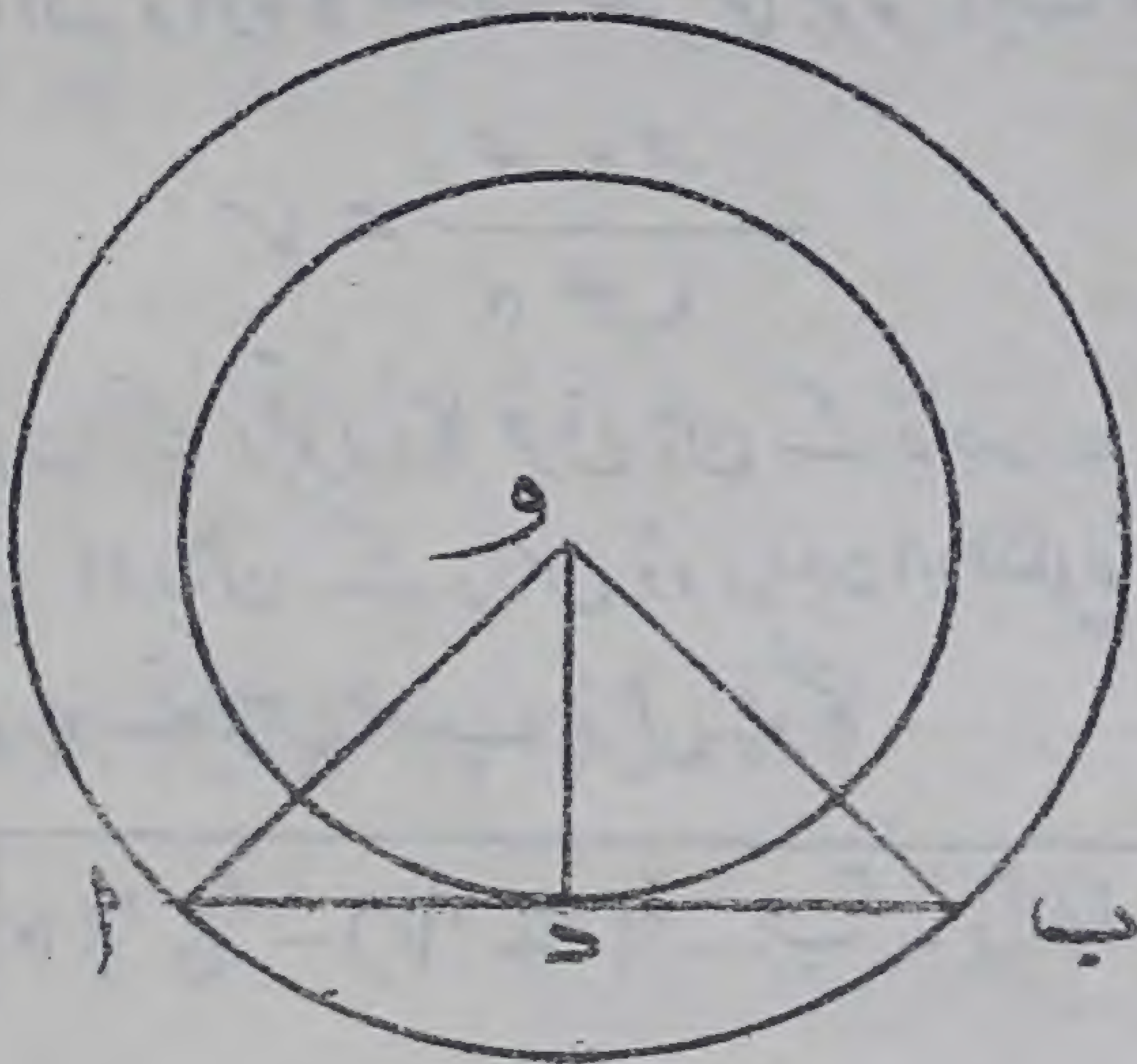
(۱۱) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے وتر نقطہ و پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا و ب × رقبہ ا ب ج د = رقبہ ا ب ج × رقبہ ا ب د

منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص

۱۶۸ ــــــ فرض کرو کہ و، اُن دائروں کا مرکز ہے جو ن ضلعوں والے ایک منتظم کثیر الاضلاع کے گرد اور اس کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قبل الذکر دائرہ کا نصف قطر R ہے اور مابعد الذکر دائرہ کا نصف قطر r، اور فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کا طول ا ہے۔

و

ب د ا

(209) اگر کثیر الاضلاع کا ایک ضلع اب ہو اور اندرونی دائرہ کے ساتھ اس کا نقطہ تماس د ہو تو زاویہ اوب = $\frac{2\pi}{ن}$ اور زاویہ اود = $\frac{\pi}{ن}$ پس

$$ا = ۲ ر جب \frac{\pi}{ن} = ۲ ر_۱ مس \frac{\pi}{ن} \quad \ldots \quad (۲۸)$$

اس طرح دائروں کے نصف قطر معلوم ہو جاتے ہیں اگر ایک ضلع ا دیا گیا ہو۔ مثلث و اب کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} ر^2 جب \frac{2\pi}{ن}، \text{ یا } \frac{1}{2} ا ر_۱، \text{ یا } ر_۱^2 مس \frac{\pi}{ن}$$

اس لیے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$$\frac{1}{2} ن ر^2 جب \frac{2\pi}{ن}، \text{ یا } ن ر_۱^2 مس \frac{\pi}{ن}، \quad \ldots \quad (۲۹)$$

یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ ایک دائرہ کے اندر یا گرد ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کے کھینچنے کا سوال زاویہ $\frac{\pi}{ن}$ کے دائری تفاعلوں کی تعیین کے سوال میں تحویل ہوتا ہے۔

۱۶۹ ـــــ مثالیں

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کو قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا قطر ق جو اِن تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے ایسا ہے کہ

$$\sqrt{\frac{ق}{س-ا} - 1} + \sqrt{\frac{ق}{س-ب} - 1} + \sqrt{\frac{ق}{س-ج} - 1} = \sqrt{\frac{س}{ق-س}}$$

اگر دیئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں اور اُس دائرہ کا مرکز و ہو جس کا قطر ق ہے تو

$$\text{و د} = \tfrac{1}{2}(\text{ق} - \text{ا})،\ \text{و ع} = \tfrac{1}{2}(\text{ق} - \text{ب})،\ \text{و ف} = \tfrac{1}{2}(\text{ق} - \text{ج})$$

نیز مثلث دع ف کے ضلع $\tfrac{1}{2}$ ا، $\tfrac{1}{2}$ ب، $\tfrac{1}{2}$ ج ہیں، پس رشتہ

$$\triangle \text{و ع ف} + \triangle \text{و ف د} + \triangle \text{و د ع} = \triangle \text{د ع ف}$$

میں مثلثوں کے رقبوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک نقطہ پ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے

$$\tfrac{1}{2}(\text{ر}^2 - \text{ف}^2)\ \text{جب ا جب ب جب ج}$$

جس میں ف سے وہ فاصلہ مُراد ہے جو پ اور حائط دائرہ کے مرکز کے درمیان ہے۔

و پ کو خارج کرو تاکہ وہ حائط دائرہ سے نقطہ پَ پر ملے، پَ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود پَ لَ، پَ مَ، پَ نَ کھینچو تو ان کے پائیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مثلث کے لحاظ سے پَ کا خطِ پائیں کہتے ہیں۔ ایک نقطہ سے ایک مثلث کے ضلع پر جو عمود کھینچا جائے وہ مثبت شمار ہوتا ہے اگر نقطہ اسی جانب واقع ہو جس جانب ضلع کے مقابل کا زاویہ واقع ہے اور منفی شمار ہوتا ہے اگر نقطہ مذکورہ بالا جانب کے مقابل واقع ہو۔

$$\text{اب ہمیں حاصل ہوتا ہے}\quad \frac{\text{پ ل} - \text{و د}}{\text{پَ لَ} - \text{و د}} = \frac{\text{و پ}}{\text{و پَ}} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \qquad (210)$$

$$\text{اس لیے}\ \text{پ ل} = (\text{ر} - \text{ف})\ \text{جم ا} + \frac{\text{ف}}{\text{ر}}\ \text{پَ لَ}$$

اسی طرح پ م، پ ن کے لیے تشابہ جملے ملتے ہیں۔ اب

$$2\triangle \text{ل م ن} = \text{پ م} \times \text{پ ن جب ا} + \text{پ ن} \times \text{پ ل جب ب} + \text{پ ل} \times \text{پ م جب ج}$$

$= (ر - ف)^{۲}$ Σ جب ا جم ب جم ج + $\frac{ف^{۲}}{ر^{۲}}$ Σ پَ مَ × پَ نَ جب ا

+ $\frac{ف}{ر}$ (ر - ف) Σ پَ لَ جب ا

نیز $\frac{۱}{۲}$ Σ پَ مَ × پَ نَ جب ا مثلث لَ مَ نَ کا رقبہ ہے. جو صفر ہے اور

Σ پَ لَ جب ا = $\frac{۱}{۲ر}$ Σ ا × پَ لَ = $\frac{۱}{ر}$ Σ ∆ پَ ب ج = $\frac{۱}{ر}$ ∆ ا ب ج

اور Σ جب ا جم ب جم ج = جب ا جب ب جب ج

پس ۲∆ ل م ن = $(ر - ف)^{۲}$ جب ا جب ب جب ج + ۲ ف (ر - ف) جب ا

× جب ب جب ج = $(ر^{۲} - ف^{۲})$ جب ا جب ب جب ج

(۳) اگر ا، ب، ج کوئی تین ثابت نقطے ہوں اور پ کوئی نقطہ ایک دائرہ پر ہو جس کا مرکز و ہے تو ثابت کرو کہ اِس دائرہ پر پ کے تمام مقامات کے لیے

$ا پ^{۲}$ × ∆ ب و ج + $ب پ^{۲}$ × ∆ ج و ا + $ج پ^{۲}$ × ∆ ا و ب

مستقل ہے۔

زاویوں ب و ج، ج و ا، ا و ب کو عہ، بہ، جہ سے تعبیر کرو تو عہ + بہ + جہ = ۲ π، فرض کرو کہ زاویہ پ و ا = ط۔ اب چونکہ

ا پ^۲ = و پ^۲ + و ا^۲ − ۲ و ا × و پ جم ط

مع ب پ^۲، ج پ^۲ کے لیے تشابہ جملوں کے، اس لیے مندرجہ بالا جملہ

= و پ^۲ × △ ا ب ج + Σ و ا^۲ × △ ب و ج − ۲ و پ Σ و ا × △ ب و ج جم ط

(211) اس جملہ کی پہلی دو رقمیں، دائرہ پر پ کے محل پر منحصر نہیں ہیں اور آخری رقم میں ۲ و پ کا ضربی ہے

$\frac{1}{2}$ و ا × و ب × و ج {جم ط جب عہ + جم (ط + جہ) جب بہ + جم (بہ − ط) جب جہ}

یا $\frac{1}{2}$ و ا × و ب × و ج جم ط (جب عہ + جب بہ جم جہ + جم بہ جب جہ)

اور یہ جملہ صفر ہے؛ اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کی مخصوص صورتیں حسب ذیل ہیں :—

(ا) پ ا^۲ جب ۲ ا + پ ب^۲ جب ۲ ب + پ ج^۲ جب ۲ ج مستقل ہے جبکہ پ، حائط دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(بہ) پ ا^۲ جب ا + پ ب^۲ جب ب + پ ج^۲ جب ج مستقل ہے جبکہ پ، اندرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

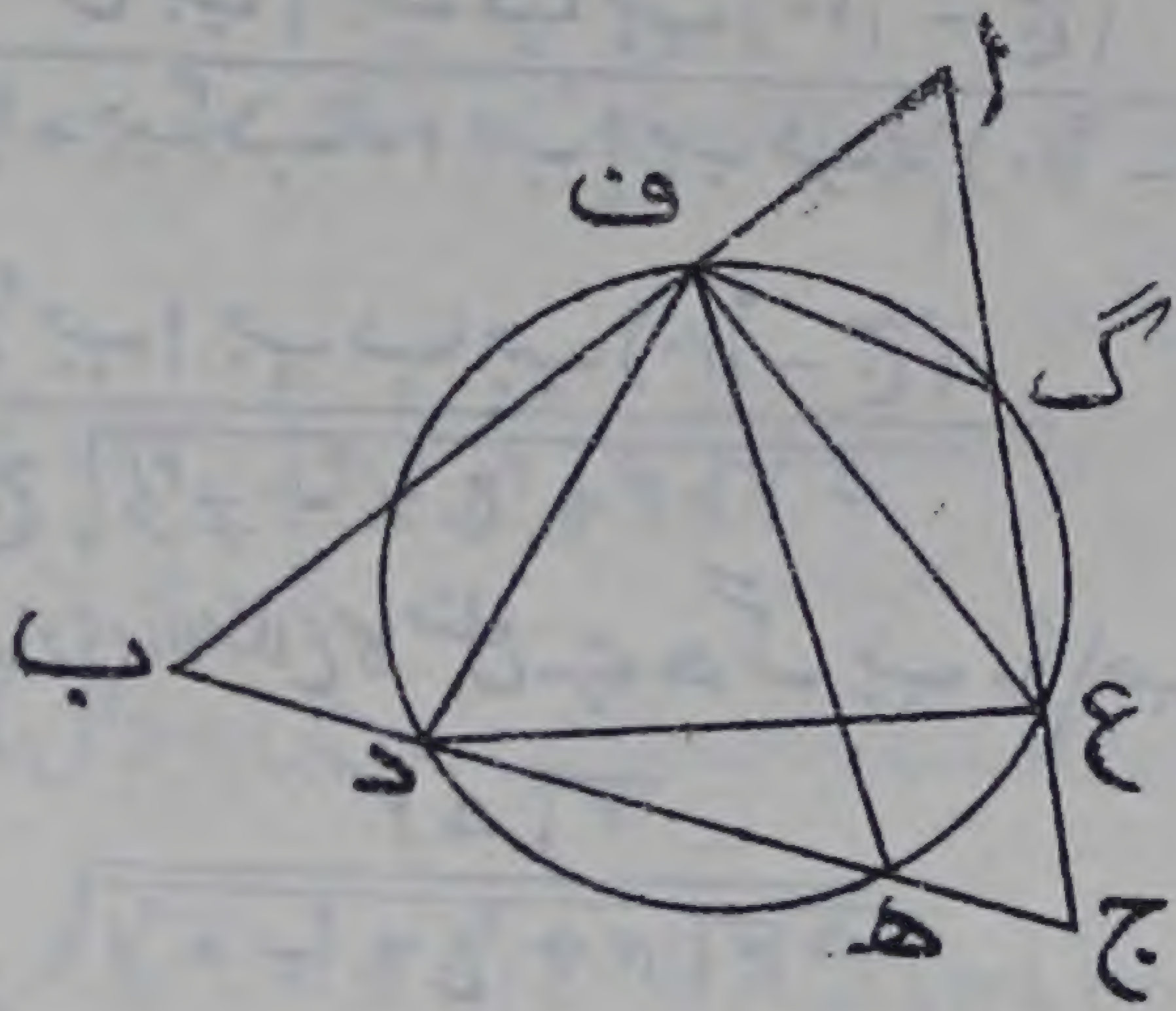
(ج) پ ا^۲ جب ا جم (ب − ج) + پ ب^۲ جب ب جم (ج − ا) + پ ج^۲ جب ج جم (ا − ب) مستقل ہے جبکہ پ، نو نقطی دائرہ پر واقع ہوتا ہے

(۴) ثابت کرو کہ اس اقل تساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کا طول

$$\frac{2\sqrt{2}\,\triangle}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,\triangle}}$$

(جہاں $\triangle$ = ۲ ﷺ ...)

ہے جو ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا جا سکے اس طور پر کہ اس کے راس دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر واقع ہوں، جملہ بالا میں △ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مُراد ہے۔

فرض کرو کہ ایسا متساوی الاضلاع مثلث د ع ف ہے اور فرض کرو کہ د ع ف کا حائط دائرہ ب ج اور ا ج کو علی الترتیب ھ اور گ میں قطع کرتا ہے، زاویوں ف گ ا، ف ھ ب میں سے ہر ایک ۶۰° ہے، اور اس لیے ف گ، ف ھ ثابت سمتوں میں ہیں؛ نیز زاویہ ھ ف گ = ۱۲۰° - ج

اگر ا ف کو لا سے تعبیر کریں تو

ف گ = $\frac{\text{لا جب ا}}{\text{جب } 60^\circ}$، ف ھ = (ج - لا) $\frac{\text{جب ب}}{\text{جب } 60^\circ}$

اس لیے ھ گ^2 = قم^2 ۶۰° {لا^2 جب^2 ا + (ج - لا)^2 جب^2 ب - ۲ لا (ج - لا)
× جب ا جب ب جم (۱۲۰° - ج)}

اب دائرہ کا نصف قطر ہے ھ گ \ ۲ جب (۱۲۰° - ج)، پس دائرہ اقل ہوگا جبکہ ھ گ اقل ہو۔ اب کسی دو درجی جملہ لہ $لا^۲$ + ۲ مہ لا + نہ کی اقل قیمت نہ - $\frac{مہ^۲}{لہ}$ ہے (جہاں لہ مثبت ہے) کیونکہ لہ $لا^۲$ + ۲ مہ لا + نہ اس شکل لہ $(لا + \frac{مہ}{لہ})^۲$ + نہ - $\frac{مہ^۲}{لہ}$ میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس لیے ھ گ جب ۶۰° کی اقل قیمت کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے (212)

$$\left[ج^۲ جب^۲ ب - \frac{\{ج جب^۲ ب + ج جب ا جب ب جم (۱۲۰° - ج)\}^۲}{جب^۲ ا + جب^۲ ب + ۲ جب ا جب ب جم (۱۲۰° - ج)} \right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{ج جب ا جب ب جب (۱۲۰° - ج)}{\{جب^۲ ا + جب^۲ ب + ۲ جب ا جب ب جم (۱۲۰° - ج)\}^{\frac{۱}{۲}}}$$

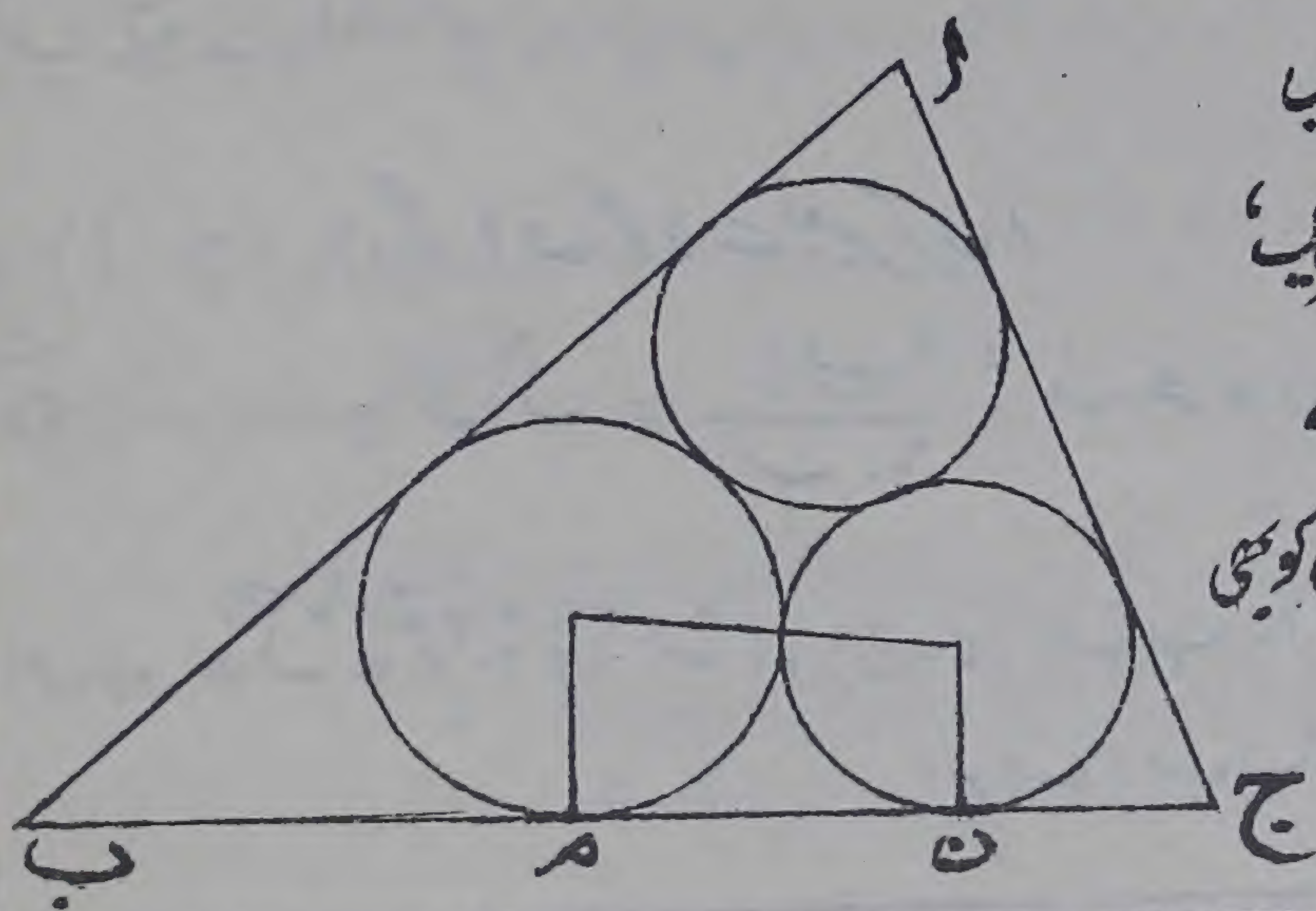
$$= \frac{\sqrt{۲} ج^۲ جب ا جب ب جب (۱۲۰° - ج)}{جب ج \sqrt{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ۴ \sqrt{۳} \Delta}}$$

اب مساوی الاضلاع کا ضلع ہے ھ گ جب ۶۰° \ جب (۱۲۰° - ج)، پس اس ضلع کی اقل قیمت ہے

$$\frac{۲ \Delta \sqrt{۲}}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ۴ \sqrt{۳} \Delta}}$$

(۵) تین دائرے بناؤ جو باہم مس کریں اور ان میں سے ہر ایک ایک دیے ہوئے مثلث کے دو ضلعوں کو بھی مس کرے۔

ا

ب م ن ج

فرض کرو کہ دائروں کے نصف قطر غم۱، غم۲، غم۳ ہیں، تب م ن = ۲ √(غم۲ غم۳)

اس لیے ا = ب م + ج ن + م ن = غم۲ مم ½ ب + غم۳ مم ½ ج + ۲ √(غم۲ غم۳)

مع ب اور ج کے لیے متشابہ جملوں کے۔

فرض کرو لا^۲ = غم۱ مم ½ ا، ما^۲ = غم۲ مم ½ ب، ی^۲ = غم۳ مم ½ ج،

√(مس ½ ب مس ½ ج) = −جم عہ، √(مس ½ ج مس ½ ا) = −جم بہ، √(مس ½ ا مس ½ ب) = −جم جہ

تو جب^۲ عہ = ۱ − مس ½ ب مس ½ ج = ا/س، اور اسی طرح جب^۲ بہ = ب/س، جب^۲ جہ = ج/س

اس لیے ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

$$\frac{\text{ما}^2 + \text{ی}^2 - 2\,\text{ما ی جم عہ}}{\text{جب}^2\,\text{عہ}} = \frac{\text{ی}^2 + \text{لا}^2 - 2\,\text{ی لا جم بہ}}{\text{جب}^2\,\text{بہ}} = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\,\text{لا ما جم جہ}}{\text{جب}^2\,\text{جہ}} = \text{س}$$

(213) یہ مساواتیں دفعہ ۶۸ مثال (۱۲) میں زیر بحث آ چکی ہیں۔ اس میں جو پہلا حل حاصل ہوا تھا اس کے لینے سے

لا = √س جم (ثہ − عہ)، ما = √س جم (ثہ − بہ)، ی = √س جم (ثہ − جہ)

جہاں ۲ ثہ = عہ + بہ + جہ۔ اس لیے غم۱ = س مس ½ ا جم^۲ (ثہ − عہ)،

غم۲ = س مس ½ ب جم^۲ (ثہ − بہ)، غم۳ = س مس ½ ج جم^۲ (ثہ − جہ)

دائروں کے مطلوبہ نصف قطر ہیں۔ محولہ بالا مثال کے دوسرے حلوں سے دائروں کے تین جٹوں کے نصف قطر ملتے ہیں، یہ دائرے ایسے ہیں کہ ہر جٹ میں سے دو دائرے مثلث کے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے ہی جٹ کے نصف قطر ہیں

س مس ½ ا جم^۲ س، س مس ½ ب جم^۲ (س − جہ)، س مس ½ ج جم^۲ (س − بہ)

پس دائروں کے کل آٹھ جٹ ہیں، جو دیے ہوئے مسئلہ کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔

مندرجہ بالا حل لشیمز (Lechmütz) کے حل سے لیا گیا جو *Nouvelles Annales* کی جلد پنجم میں درج ہے۔ اس مسئلہ کا ہندسی حل، جو مال فیٹی کے مسئلہ کے طور پر مشہور ہے، کیسی (Casey) کی *Sequel to Euclid* میں ملیگا اور اس پر ایک تاریخی مضمون ایم سیمنس کا لکھا ہوا Bulletin de L'Academie Royale de Belgigue بابتہ ۱۸۷۴ء میں ملیگا۔

بارہویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک متوازی الاضلاع کے ضلع ا، ب، زاویہ عہ پر ایک دوسرے سے مائل ہیں اور اس کے وتروں کا درمیانی زاویہ ط ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\text{۲ اب جب عہ}}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$$

۲۔ اگر ایک مثلث کے راسوں سے اس کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس کے فاصلے عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ر} = \left(\frac{\text{عہ بہ جہ}}{\text{عہ + بہ + جہ}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۳۔ ایک دائرہ کے اندر ایک منتظم کثیر الاضلاع اور اس کے گرد اتنے ہی ضلعوں والا دوسرا منتظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے ہیں۔ قبل الذکر کثیر الاضلاع کے رقبہ کو مابعد الذکر کے رقبہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ۳ : ۴ ہے۔ ضلعوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۔ ایک متوازی الاضلاع کے ہر زاویہ سے ایک ایک خط اس طرح کھینچا گیا ہے کہ یہ خطوط ایک ہی ترتیب میں متصلہ ضلعوں کے ساتھ ایک ہی جانب مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ خطوط ایک دوسرا متوازی الاضلاع بنائینگے جو ابتدائی متوازی الاضلاع کے متشابہ ہوگا اگر $\text{ا}^2 - \text{ب}^2 = \text{۲ اب جم ب}$ جہاں ا، ب ضلع ہیں اور متوازی الاضلاع کا زاویہ ب ہے۔

۵۔ وہ خطوطِ مستقیم جو ایک مثلث کے زاویوں ا، ج کی تنصیف

ف Malfatte

کرتے ہیں حائط دائرہ کے محیط سے نقطوں ء، جہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ءہ جہ ج ب اور ب ا سے تین حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں نسبت ہے

جب۲ ½ ا : ۲ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج : جب۲ ½ ج

۶۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو اور اس کے ضلعوں پر عمود آ ا، آ ب، آ ج ہوں اور ذوارلبعۃ الاضلاعوں ا ب آ ج، ب ج آ ا، ج ا آ ب کے اندرونی دائروں کے نصف قطر غم۱، غم۲، غم۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{غم}_1}{\text{ر} - \text{غم}_1} + \frac{\text{غم}_2}{\text{ر} - \text{غم}_2} + \frac{\text{غم}_3}{\text{ر} - \text{غم}_3} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{2\,\text{ر}}$$

۷۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ کے مرکزوں کو ملانیوالا خط ضلع ب ج کے ساتھ زاویہ $\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{جب ب} - \text{جب ج}}{\text{جم ب} + \text{جم ج} - 1}\right)$ بناتا ہے

۸۔ اگر ایک مثلث میں اس کے دو زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں کے پائیں ان ضلعوں کے نقاط وسطی سے متساوی الفصل ہوں تو ثابت کرو کہ تیسرا زاویہ ۶۰° ہے یا ۱۲۰°، وگرنہ مثلث متساوی الساقین ہے۔

۹۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو جس کا زاویہ ج قائمہ ہے اور ا ب پر عمود وار خطوط مستقیم ا ع، ب د کھینچے جائیں جو ب ج، ا ج ممدودہ کو علی الترتیب ع، د پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس ج ع د = مس۳ ب ا ج، اور

△ ع ج د = △ ا ج ب

۱۰۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ راسوں سے اس کے فاصلے ایک دوسرے مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کے

متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ اِن فاصلوں کے درمیانی زاویے ہونگے

$$\frac{1}{3}\pi + ا ، \frac{1}{3}\pi + ب ، \frac{1}{3}\pi + ج$$

۱۱- اُن چار دائروں میں سے جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں ہر ایک دائرہ کے نقاط تماس ملائے گئے ہیں ؛ اندرونی دائرہ سے اس طور پر جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ اُن مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ سے تفریق کیا گیا ہے جو جانبی دائروں سے مذکور الصدر طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل تفریق اصلی مثلث کے رقبہ کا دُگنا ہے۔

۱۲- اگر ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہو اور اُس کے اندر کوئی نقطہ پ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\triangle ا پ ج \times م ا پ ج - \triangle ب پ د \times م ب پ د$$

پ کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۱۳- تین دائروں کو جو ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں ایک چوتھا دائرہ مس کرتا ہے جس کے اندر یہ سب دائرے ہیں۔ اگر اندرونی تین دائروں کے نصف قطر اَ، بَ، جَ ہوں اور اِن کے مرکزوں کے فاصلے بیرونی دائرہ کے مرکز سے علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۲\left(\frac{بہ\, جہ}{بَ\, جَ} + \frac{جہ\, عہ}{جَ\, اَ} + \frac{عہ\, بہ}{اَ\, بَ}\right) = ۴ + \frac{عہ^{۲}}{اَ^{۲}} + \frac{بہ^{۲}}{بَ^{۲}} + \frac{جہ^{۲}}{جَ^{۲}}$$

۱۴- ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب میں علی الترتیب نقطے پ، ق، ر ہیں ایسے کہ $\frac{ب پ}{پ ج} = \frac{ج ق}{ق ا} = \frac{ا ر}{ر ب}$ ؛ ثابت کرو کہ $ا پ^{۲} + ب ق^{۲} + ج ر^{۲}$ اقل ہوگا جبکہ پ، ق، ر، ضلعوں کی تنصیف کریں۔

۱۵- ایک مثلث کے ضلعوں اَ، بَ، جَ پر مثلث کے بیرونی جانب قطاع دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے اندر علی الترتیب زاویے عہ، بہ، جہ بنتے ہیں اور عہ + بہ + جہ = ۲π، ان دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔

(215)

ثابت کرو کہ اس مثلث کے زاویے عہ، بہ، جہ ہیں۔

۱۶۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے مقابل کے زاویوں کے ناصفوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ اُس مستطیل کے رقبہ کا چوتھائی ہے جس کے متصلہ اضلاع قبل الذکر مثلث کا گھیرا اور اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہیں۔

۱۷۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ پ ہے اور اس نقطہ سے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں۔ اگر م ن + ن ل + ل م مستقل ہو اور ل کے مساوی ہو تو

ثابت کرو کہ پ ا^2 + پ ب^2 + پ ج^2 کی اقل قیمت ہے

$$\frac{ل^2}{جب^2 ا + جب^2 ب + جب^2 ج}$$

۱۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے متوازی علی الترتیب ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$ فاصلوں پر خطوط مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کھینچے گئے ہیں۔ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ معلوم کرو۔

اگر ایسے آٹھ مثلث بنائے جائیں تو ان کے گھیروں کا اوسط مثلث ا ب ج کے گھیرے کے مساوی ہوتا ہے لیکن اِن کے رقبوں کا اوسط مثلث ا ب ج کے رقبہ سے بقدر

$$\frac{ا^2 ر_1^2 + ب^2 ر_2^2 + ج^2 ر_3^2}{۴ \triangle}$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک مختلف الاضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو قاعدے مانکر متشابہ متساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں ایسے کہ یا تو سب کے سب اندرونی جانب ہیں یا سب کے سب بیرونی جانب۔ اِن متساوی الساقین مثلثوں کے راسوں کو ملاکر ایک نیا مثلث اَ بَ جَ بنایا گیا ہے۔ اگر اَ بَ جَ متساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ متساوی الساقین مثلثوں کے

قاعدوں پر کے زاویوں میں سے ہر ایک ۳۰° ہے لیکن اگر اَبَ جَ، مثلث ا ب ج کے تشابہ ہو تو ان زاویوں میں سے ہر ایک مسا $\frac{۴ \Delta}{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲}$ ہے جہاں Δ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مراد ہے۔

۲۰۔ ایک خطِ مستقیم تین ہم مرکز دائروں کو نقطوں ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے اور ان کے مرکز سے فاصلہ ف پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ا، ب، ج پر کے مماسوں سے بنتا ہے۔ $\frac{ب ج \times ج ا \times ا ب}{۲ ف}$ ہے۔

۲۱۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہو اور ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ب ج \text{ جم } ن د ج + ج ا \text{ جم } ن ع ا + ا ب \text{ جم } ن ف ب = ۰$$

۲۲۔ ایک مثلث کے ضلع ب ا پر ب د، اج کے مساوی ناپا گیا ہے۔ ب ج اور ا د کی تنصیف نقاط ع، ف سے کی گئی ہے اور ع اور ف کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ع ف کے حائط دائرہ کا نصف قطر $\frac{۱}{۴}$ ب ج $\times$ قم $\frac{۱}{۲}$ ا ہے۔

۲۳۔ اگر مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر اَ، بَ، جَ کوئی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا بَ \times ب جَ \times ج اَ + بَ ج \times جَ ا \times اَ ب = ۴ ر \times \Delta اَ بَ جَ$$

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے فاصلے مثلث کے راسوں سے لا، ما، ی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا^۲ لا^۴ + ب^۲ ما^۴ + ج^۲ ی^۴ + (ا + ب + ج)^۲ لا^۲ ما^۲ ی^۲ = ۲ (ب^۲ ج^۲ ما^۲ ی^۲ + ج^۲ ا^۲ ی^۲ لا^۲ + ا^۲ ب^۲ لا^۲ ما^۲)$$

۲۵۔ د، ع، ف وہ نقطے ہیں جہاں مثلث ا ب ج کے زاویوں کے

(216)

ناصف مقابل کے ضلعوں سے ملتے ہیں؛ اگر لا، ما، ی وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث د ع ف کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے ہیں اور ع۱، ع۲، ع۳ وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث ا ب ج کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ع}_1^2}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ع}_2^2}{\text{ما}^2} + \frac{\text{ع}_3^2}{\text{ی}^2} = 11 + 8\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ا}\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ج}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے مرکز عمودی کے فاصلے اس کے راسوں سے حسب ذیل مساوات کی اصلیں ہیں:۔

$$\text{لا}^3 - 2(\text{م} + \text{ر})\,\text{لا}^2 + (\text{ر}^2 - 4\text{م}^2 + \text{س}^2)\,\text{لا} - 2\text{م}\left\{\text{س}^2 - (\text{ر} + 2\text{م})^2\right\} = 0$$

۲۷۔ اگر ایک مثلث کا ہر ضلع اس کے گھیرے کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جو ۲ : ۵ سے کم ہے تو ایک مثلث بنایا جا سکتا ہے جس کے ضلع جانبی دائروں کے نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۲۸۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے اور ب ج کے نقطہ وسطی د سے ایک خط، ب ج کے علی القوائم کھینچا گیا ہے جو دائرہ کے محیط سے ع اور ف پر ملتا ہے۔ ا ع اور ا ف کو ملایا گیا ہے اور اس طرح مثلث ا ع ف کو حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح ا ب، ا ج کی تنصیف کر کے باقی اور دو مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے رقبے نسبت جب (ب۔ج) : جب (ج۔ا) : جب (ا۔ب) میں ہیں۔

۲۹۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ اُن دو دائروں کے نصف قطر جو ان تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں یہ ہیں

$$\frac{\text{ا ب ج}}{(\text{ب ج} + \text{ج ا} + \text{ا ب}) \pm 2\sqrt{\text{ا ب ج}\,(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})}}$$

۳۰۔ اب ج ایک مثلث ہے؛ اس کے بیرونی جانب اس کے ضلعوں پر تساوی الاضلاع مثلث اَب ج، بَ ج ا، جَ اب بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

(۱) ااَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ و پر ملتے ہیں؛

(۲) و اَ = و ب + و ج؛

(۳) Δ اَ بَ جَ = $\frac{۵}{۲}$ Δ اب ج + $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ (ب ج^{۲} + ج ا^{۲} + ا ب^{۲})

۳۱۔ ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب کے وسطی نقطے اَ، بَ ہیں؛ ا، ب سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں د، ع ہیں؛ اور اَ د، بَ ع کی تنصیف نقطوں پ، ق سے ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

پ ق = $\frac{۱}{۴}$ $\sqrt{}$ ا^{۲} + ب^{۲} − ۲ ا ب جم ۳ ج

۳۲۔ ایک حادۃ الزاویہ مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمود نقطہ پ پر ملتے ہیں اور ایک نیا مثلث ضلعوں پ ا، پ ب، پ ج کے ساتھ بنایا گیا ہے۔ وہ شرط معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو اور اگر یہ ممکن ہے اور اس نئے مثلث کے زاویے عہ، بہ، جہ ہیں تو ثابت کرو کہ

۱ + $\frac{\text{جم عہ}}{\text{جم ا}}$ + $\frac{\text{جم بہ}}{\text{جم ب}}$ + $\frac{\text{جم جہ}}{\text{جم ج}}$ = $\frac{۱}{۲}$ قط ا قط ب قط ج

۳۳۔ نصف قطر ر کے ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز ج ہے دو نقطے ا، ب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن دائروں کے قُطر جو ا، ب میں سے گذریں اور دیے ہوئے دائرہ کو مس کریں مساوات ذیل کی اصلیں ہیں:—

لا^{۲} (ر^{۲} ج^{۲} − ا^{۲} ب^{۲} جب^{۲} ج) − ۲ لا ر ج^{۲} (ر^{۲} − ا ب جم ج) + ج^{۲} (ر^{۴} − ۲ ر^{۲} ا ب جم ج + ا^{۲} ب^{۲}) = ۰

جہاں چھوٹے و بڑے حروف مثلث اب ج کے اجزاء کو تعبیر کرتے ہیں۔

۳۴۔ اگر ایک مثلث کو کاغذ پر سے کاٹ کر علیٰحدہ کر لیا جائے اور اس کو موڑ کر دُہرا کیا جائے اس طور پر کہ سلوٹ حائط دائرہ کے مرکز اور ایک راس ا

(217)

یں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دہرا کئے ہوئے حصہ کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}$ ب² جب² ج جم ج قم (۲ج - ب) قط (ج - ب) جہاں ج > ب

۳۵- ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین سے متصلہ ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان چھ عمودوں کے پائین ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا نصف قطر ہے

ر (جم² ا جم² ب جم² ج + جب² ا جب² ب جب² ج)$^{\frac{1}{2}}$

۳۶- اگر پ ایک نقطہ ہو جہاں سے ایک مثلث اب ج کے تین جانبی دائروں کے مماس مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ پ کا فاصلہ ضلع ب ج سے حسب ذیل ہے:-

$\frac{1}{2}$ (ب + ج) قط $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج

۳۷- اگر ل، م، ی ان تین مربعوں کے ضلع ہوں جو مثلث اب ج کے اندر اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کا ایک ایک ضلع بالترتیب مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب پر واقع ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{ل} + \frac{1}{م} + \frac{1}{ی} = \frac{1}{ا} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ر}$

۳۸- مثلث اب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا اَ، ب بَ، ج جَ ہیں۔ مثلثوں ا بَ جَ، ب جَ اَ، ج اَ بَ کے مرکز عمودی د$_1$، د$_2$، د$_3$ ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات د$_1$ د$_2$ د$_3$، اَ بَ جَ مساوی ہیں، (۲) ۲ ر$_1$ ر² = ر$_ا$ ر$_ب$ ر$_ج$ جہاں دائروں د$_2$ اَ د$_3$، د$_3$ بَ د$_1$، د$_1$ جَ د$_2$ کے نصف قطر ر$_ا$، ر$_ب$، ر$_ج$ ہیں اور اس دائرہ کا نصف قطر ر ہے جو اَ بَ جَ کے اندر کھینچا گیا ہے اور ر$_1$ اس دائرہ کا جو اَ بَ جَ کے گرد کھینچا گیا ہے۔

۳۹- اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے اندرونی

دائرہ کے مرکز سے لا، ما، ی ہوں اور حائط دائرہ کا قطر ق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا ما ی} + \text{ق}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2) = 4\,\text{ق}^3$$

۴۰۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے ملانیوالے خطوط مستقیم اِس دائرہ کو ا، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ر}^2\left(\text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا} + \text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب} + \text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}\right)$$

۴۱۔ اگر ایک مثلث کے ہر ضلع کو بقدر چھوٹی مقدار لا کے بڑھایا جائے تو ثابت کرو کہ رقبہ میں تقریباً $\text{ر لا}\,(\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج})$ کا اضافہ ہوگا۔

۴۲۔ ایک دائرہ کے قطر ا اَ، ب بَ، ج جَ ہیں اور اَ، بَ، جَ سے علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر کے عمودوں کے پائیں د، ع، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ رقبوں ا ب ج، د ع ف میں نسبت ۱ : ۲ جم ا جم ب جم ج ہے۔

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز آ سے ضلعوں پر عمود آد، آع، آف کھینچے جائیں تو آع ا ف، آف ب د، آد ج ع میں کھینچے ہوئے دائروں کے نصف قطر معلوم کرو؟ اگر یہ نصف قطر علی الترتیب غ_1، غ_2، غ_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ر} - 2\,\text{غ}_1)(\text{ر} - 2\,\text{غ}_2)(\text{ر} - 2\,\text{غ}_3) = \text{ر}^3 - 4\,\text{غ}_1\,\text{غ}_2\,\text{غ}_3$$

۴۴۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا نصف قطر ر جو اِن تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے مساوات

$$\sqrt{\text{ر ب ج}\,(\text{ب}+\text{ج}+\text{ر})} + \sqrt{\text{ر ج ا}\,(\text{ج}+\text{ا}+\text{ر})} + \sqrt{\text{ر ا ب}\,(\text{ا}+\text{ب}+\text{ر})} = \sqrt{\text{ا ب ج}\,(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

(218)

سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۵ ۔ مثلث ا ب ج کے راسوں میں سے مثلث کے مستوی کے عمود وار خطوط ا ا۱، ب ب۱، ج ج۱ کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول علی الترتیب لا، ما، ی ہیں۔ اگر ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ کے رقبے Δ اور Δ_1 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\Delta_1^2 - \Delta^2 = \tfrac{1}{4}\{\text{ا}^2(\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}-\text{ی}) + \text{ب}^2(\text{ما}-\text{ی})(\text{ما}-\text{لا}) + \text{ج}^2(\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}-\text{ما})\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\{\text{ا}_1^2(\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}-\text{ی}) + \text{ب}_1^2(\text{ما}-\text{ی})(\text{ما}-\text{لا}) + \text{ج}_1^2(\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}-\text{ما})\}$$

۴۶ ۔ تین دائرے بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک مثلث کے دو ضلعوں اور نیز اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے۔ ان تینوں دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے رقبہ کو دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کے ساتھ نسبت ہے

$$\text{۴ جب } \tfrac{1}{2}\text{ا جب } \tfrac{1}{2}\text{ب جب } \tfrac{1}{2}\text{ج } (\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ا} + \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ج})$$

$$: \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ا . جم } \tfrac{1}{2}\text{ب . جم } \tfrac{1}{2}\text{ج } (\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ا} + \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ج})$$

۴۷ ۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناصف مقابل کے ضلعوں سے د، ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ ہے

$$\text{۲ر}^2 \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ا . جم } \tfrac{1}{2}\text{ب . جم } \tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج}) . \text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ا}) . \text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}+\text{ب})^2(\text{ا}+\text{ج})^2\text{ع ف}^2 + (\text{ب}+\text{ج})^2(\text{ب}+\text{ا})^2\text{ف د}^2 + (\text{ج}+\text{ا})^2(\text{ج}+\text{ب})^2\text{د ع}^2$$

$$= \text{۱۲ } \Delta^2 \text{ ر } (\text{۱۱ ر} + \text{۲ ر})$$

جہاں Δ مثلث ا ب ج کے رقبے کو تعبیر کرتا ہے۔

۴۸ - ایک مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز و ہے، اس کا مرکز عمودی ک ہے؛ اور و ک، حائط دائرہ کو پ اور پَ میں قطع کرتا ہے اور پ اور پَ کے خطوطِ پائیں سے ق اور قَ پر ملتا ہے ۔
ثابت کرو کہ وق × وقَ = ۲ م۲ جم ا. جم ب. جم ج

۴۹ - ایک مثلث کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہے اور ج ب اور ج ا کے وسطی نقطے د، ع ہیں ۔ ثابت کرو کہ ذوالاربعۃ الاضلاع ن د ج ع کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}$ غ۲ (جب ۲ ا + جب ۲ ب + ۲ جب ۲ ج)

جہاں نو نقطی دائرہ کا نصف قطر غ ہے ۔

۵۰ - ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے اور اس دوسرے مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے تیسرا مثلث، علیٰ ہذا القیاس ۔ ثابت کرو کہ ن ویں مثلث کے ضلع ہیں

ا قم $\frac{1}{2}$ قم $\frac{\pi - 1}{2}$ ۔ قم $\frac{3\pi + 1}{2^3}$ ... قم $\frac{(2^{ن-2} - 1)\pi + (-1)^{ن-2}\, 1}{2^{ن-1}}$

مع دیگر دو متشابہ جملوں کے ۔

۵۱ - اگر مثلث ا ب ج کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہو اور ان، ب ج سے نقطہ د پر ملے تو ثابت کرو کہ

د ن : د ا :: جم (ب - ج) : ۴ جب ب جب ج

اور نیز بتاؤ کہ ب ن ج کا رقبہ $\frac{1}{2}$ م۲ جب ا. جم (ب - ج) ہے ۔

۵۲ - مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود گرائے گئے ہیں جن کے پائیں د، ع، ف ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر جو تین دائروں د ج ع، ع ا ف، ف ب د کو مس کرتا ہے حسب ذیل ہے

$$\frac{۲ م جب ا جب ب جب ج . جم ا جم ب جم ج (جب ا + جب ب + جب ج)}{جب^۲ ا جب^۲ ب جب^۲ ج - \Sigma جب^۲ ا جم^۲ ا + ۲ جم ا جم ب جم ج \Sigma جب ب جب ج}$$

۵۳ - اگر کسی نقطہ و سے مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب پر عمود و د، و ع، و ف کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$مم\ ا د ج + مم\ ب ع ا + مم\ ج ف ب = ۰$$

۵۴ - اگر ب، ج، ب دیے گئے ہوں اور ان اجزاء کے ساتھ دو مثلث موجود ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے اندرونی دائرے ایک دوسرے کو مس کرینگے اگر

$$ج^{۲}(جم^{۲} ب + ۲\ جم\ ب - ۳) + ۲\ ب ج\ (۱ - جم\ ب) + ب^{۲} = ۰$$

۵۵ - اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں سے نو نقطی دائرہ کے مماس کھینچے جائیں اور ان کے طول م۱، م۲، م۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م_{۱}^{۲}}{ر_{۱}} + \frac{م_{۲}^{۲}}{ر_{۲}} + \frac{م_{۳}^{۲}}{ر_{۳}} = ر + ۷ ر \text{ اور } \frac{م_{۱}^{۲} - م_{۲}^{۲}}{ر_{۱} - ر_{۲}} + \frac{م_{۲}^{۲} - م_{۳}^{۲}}{ر_{۲} - ر_{۳}} + \frac{م_{۳}^{۲} - م_{۱}^{۲}}{ر_{۳} - ر_{۱}} = ۲ ر + ۱۱ ر$$

۵۶ - ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے نو نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلوں کے مربعوں کا حاصل جمع ہے

$$ر^{۲}\left(\frac{۱۱}{۴} + ۲\ جم\ ا\ جم\ ب\ جم\ ج\right)$$

۵۷ - ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد چار متشابہ مثلث بنائے گئے ہیں اور ان کے رقبے ق، ق۱، ق۲، ق۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ

(ا) مثلثوں کا ایک زاویہ $۲\ جم^{-۱}\left(\frac{ق\ ق_{۱}}{ق_{۲}\ ق_{۳}}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ ہے،

(ب) $ق^{\frac{۱}{۲}} = ق_{۱}^{\frac{۱}{۲}} + ق_{۲}^{\frac{۱}{۲}} + ق_{۳}^{\frac{۱}{۲}}$

(ج) دائرہ کا نصف قطر $(ق\ ق_{۱}\ ق_{۲}\ ق_{۳})^{\frac{۱}{۸}}$ ہے۔

۵۸ - ایک مثلث کے راسوں ا' ب' ج سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مثلث کے مقابل کے ضلعوں سے ایک ہی جہت میں زاویے طہ' فہ' پہ بناتے ہیں - ثابت کرو کہ اِن خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے حائط دائرہ کا قطر ہے

$$ع \frac{جب(۲ا + فہ - پہ)\ جم\ طہ + جب(۲ب + پہ - طہ)\ جم\ فہ + جب(۲ج + طہ - فہ)\ جم\ پہ}{جب(ا + فہ - پہ)\ جب(ب + پہ - طہ)\ جب(ج + طہ - فہ)}$$

۵۹ - ایک مثلث کے ضلعوں کے محاذی ایک نقطہ و پر زاویے عہ' بہ' جہ بنتے ہیں: ثابت کرو کہ

$$(۱)\ جم\ \tfrac{1}{4}عہ + جم\ \tfrac{1}{4}بہ + جم\ \tfrac{1}{4}جہ = ۴\ جم\ \tfrac{1}{4}(بہ + جہ)\ جم\ \tfrac{1}{4}(جہ + عہ)\ جم\ \tfrac{1}{4}(عہ + بہ)$$

$$(۲)\ وا = \frac{ب ج\ جب(عہ - ا)}{ب ج\ جب\ عہ\ جب(عہ - ا) + ج ا\ جب\ بہ\ جب(بہ - ب) + ا ب\ جب\ جہ\ جب(جہ - ج)}$$

۶۰ - اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع ا) کے مستوی میں کسی نقطہ کے فاصلے مثلث کے راسوں سے $ف_1$' $ف_2$' $ف_3$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ف_1^2 ف_2^2 + ف_2^2 ف_3^2 + ف_3^2 ف_1^2 + ا^2(ف_1^2 + ف_2^2 + ف_3^2) = ا^4 + ف_1^4 + ف_2^4 + ف_3^4$$

پس ثابت کرو کہ دو متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ جن میں سے ہر ایک مثلث کے راس ایک ثابت نقطہ سے دیے ہوئے تین فاصلوں پر واقع ہیں اِن فاصلوں پر بنائے ہوئے متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے -

۶۱ - اگر مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ پ ہو اور مثلثوں ب پ ج' ج پ ا' ا پ ب کے حائط دائروں کے مرکز $و_1$' $و_2$' $و_3$ اور مثلث $و_1 و_2 و_3$ کے حائط دائرہ کا نصف قطر نہ ہو تو ثابت کرو کہ

۴ غہ جب ط جب فہ جب پہ = لا جب ط + ما جب فہ + ی جب پہ
جہاں پ ا، پ ب، پ ج کے طول لا، ما، ی ہیں اور ط، فہ، پہ، زاویے
ب پ ج، ج پ ا، ا پ ب ہیں۔

(220)

۶۲۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں اور ر_1، ر_2 اُن دائروں کے نصف قطر ہیں جو اِن تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ر}_1}+\frac{1}{\text{ر}_2}=\frac{2}{\text{ا}}+\frac{2}{\text{ب}}+\frac{2}{\text{ج}}$$

۶۳۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں ب، ج کے ناصف مقابل کے ضلعوں سے نقطوں ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع ف، ب ج کے ساتھ زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{(\text{ب}-\text{ج})\ \text{جب ا}}{(\text{ا}+\text{ب})\ \text{جم ج}+(\text{ا}+\text{ج})\ \text{جم ب}}$$

بناتا ہے۔

۶۴۔ اگر ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ_1 ہو، آ_1 ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ_2 ہو اور علیٰ ہٰذالقیاس تو بتاؤ کہ جیسے ن، لا انتہا بڑھتا ہے $\text{آ}_{\text{ن}-1}\text{آ}_{\text{ن}}$، ب ج کو اُس نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو زاویوں ج اور ب کے نیمقطری ناپوں کے درمیان ہے۔

۶۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے د، ع، ف لیے گئے ہیں اور د، ع، ف میں سے خطوطِ مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کھینچے گئے ہیں جو علیٰ الترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے مساوی المیلان ہیں اور یہ مثلث اَ بَ جَ بناتے ہیں جو ا ب ج کے تشابہ ہے۔ ثابت کرو کہ اَ بَ جَ کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہے

(ع ف. جم عہ + ف د. جم بہ + د ع جم جہ) / ۴ جب ا جب ب جب ج

جہاں ا، ب، ج کے یملان علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب کے ساتھ عہ، بہ، جہ ہیں۔

۶۶۔ اگر ایک مثلث کے حائط دائرہ پر ایک نقطہ پ ہو جس کا خط پائیں مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور اگر پ کو مرکز عمودی سے ملانیوالا خطِ مستقیم خط پائیں کو علیٰ القوائم قطع کرے تو ثابت کرو کہ

پ ا² + پ ب² + پ ج² = ۴ ر² (۱ - ۲ جم ا جم ب جم ج)

۶۷۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج میں د ایک نقطہ ہے؛ اگر مثلثوں ا ب د، ا ج د کے اندرونی دائرے ضلع ا د کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو ثابت کرو کہ ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس ضلع ب ج کے ساتھ د ہے؛ لیکن اگر دائروں کے نصف قطر مساوی ہوں تو

ج د : ب د :: قم د + قم ج : قم د + قم ب

۶۸۔ نصف قطر ر کے ایک دائرہ کے اندر کسی نقطہ سے تین سمتی نصف قطر جن کے طول ل₁، ل₂، ل₃ ہیں دائرہ تک کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے ہر دو کا درمیانی زاویہ ۲π/۳ ہے۔ ثابت کرو کہ

۳ ر² (ل₂ ل₃ + ل₃ ل₁ + ل₁ ل₂)² = (ل₂² + ل₂ ل₃ + ل₃²)(ل₃² + ل₃ ل₁ + ل₁²)(ل₁² + ل₁ ل₂ + ل₂²)

اور اگر اِس نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ف ہو تو ثابت کرو کہ

(ر² - ف²)(ل₂ ل₃ + ل₃ ل₁ + ل₁ ل₂) = ل₁ ل₂ ل₃ (ل₁ + ل₂ + ل₃)

۶۹۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج کو مس کرنے والے جانبی دائرہ کے نقاطِ تماس د₁، ع₁، ف₁ ہیں اور علیٰ ہذا القیاس مثلثوں د₁ ع₁ ف₁، د₂ ع₂ ف₂، د₃ ع₃ ف₃ کے اندرونی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ان دائروں کے نصف قطر غ₁، غ₂، غ₃ ہوں تو بتاؤ کہ

$$\frac{1}{\text{عہ}_1} : \frac{1}{\text{عہ}_2} : \frac{1}{\text{عہ}_3} = 1 - \text{مس}\,\frac{1}{4}\,\text{ا} : 1 - \text{مس}\,\frac{1}{4}\,\text{ب} : 1 - \text{مس}\,\frac{1}{4}\,\text{ج}$$

۷۰ ۔ ایک مثلث ا ب ج میں اَ ، بَ ، جَ اُن دائروں کے مرکز ہیں جن میں سے ہر ایک ، مثلث کے دو ضلعوں اور اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ ہے

$$\text{مس}\,\frac{1}{4}(\pi - \text{ا})\,\text{مس}\,\frac{1}{4}(\pi - \text{ب})\,\text{مس}\,\frac{1}{4}(\pi - \text{ج})$$

$$\times \left\{\text{قم}\,\frac{1}{4}(\pi - \text{ا})\,\text{قم}\,\frac{1}{4}(\pi - \text{ب})\,\text{قم}\,\frac{1}{4}(\pi - \text{ج}) + 4\right\} \text{ر}^2$$

۷۱ ۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے وہ تین مماس کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں کے متوازی ہیں ۔ اِن مماسوں سے مثلث کے کونوں پر تین مثلث بن جاتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن تین مثلثوں کے اندرونی دائروں کے نصف قطر لا مساوات

$$\text{س}^2\,\text{لا}^3 - \text{ر}\,\text{س}^2\,\text{لا}^2 - \frac{1}{4}\,\text{ر}^2(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{ج} - 2\,\text{ج}\,\text{ا} - 2\,\text{ا}\,\text{ب})\,\text{لا} - \text{ر}^5 = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں ۔

۷۲ ۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کو ملانیوالے خطِ مستقیم پر مثلث کے راسوں سے عمودوں کے طول ف ، ق ، ر ہیں ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف جب ا}}{\text{قط ب} - \text{قط ج}} = \frac{\text{ق جب ب}}{\text{قط ج} - \text{قط ا}} = \frac{\text{ر جب ج}}{\text{قط ا} - \text{قط ب}}$$

جبکہ ف ، ق ، ر کی علامتوں سے متعلق ایک قرارداد کر لی جائے ۔

۷۳ ۔ ایک تساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور راسوں سے اس کے فاصلے عہ ، بہ ، جہ ہیں ۔ خطوط (بہ ، جہ) ، (جہ ، عہ) ، (عہ ، بہ) کے اندرونی زاویوں کے ناصف مثلث کے تناظر ضلعوں سے

نقطوں ف، ق، ر پر علی الترتیب ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق ر کے رقبہ کو متساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ سے نسبت ہے

۲ عہ بہ جہ : (بہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + بہ)

۷۴ - مثلث ا ب ج کے مستوی میں کسی نقطہ سے راسوں کے فاصلے ل، م، ن ہیں اور حائط دائرہ کے مرکز سے اس کا فاصلہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ

ل۲ جب ۲ ا + م۲ جب ۲ ب + ن۲ جب ۲ ج = ۴ (ر۲ + ف۲) جب ا جب ب جب ج

۷۵ - اگر ایک مثلث کا مرکزِ ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ

تم ث ا ب + تم ث ب ج + تم ث ج ا = ۳ تم سہ

= تم ا ب ث + تم ب ج ث + تم ج ا ث

اور تم ا ث ب + تم ب ث ج + تم ج ث ا + تم سہ = ۰

جہاں تم سہ = تم ا + تم ب + تم ج

نیز اگر مثلث میں ک ایک نقطہ ہو ایسا کہ زاویے ک ا ج، ث ا ب مساوی ہیں مع دو اور متشابہ رشتوں کے، تو ثابت کرو کہ

تم ا ک ب + تم ب ک ج + تم ج ک ا + ½ تم سہ + ³⁄₂ مس سہ = ۰

۷۶ - ایک مثلث کے رقبہ کے اندر تین دائروں میں سے ہر دائرہ دیگر دو دائروں کو مس کرتا ہے اور نیز مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرتا ہے، اگر ایک ضلع پر نقاطِ تماس کے درمیان فاصلہ عہ ہو اور اسی طرح دیگر دو ضلعوں پر متناظر فاصلے بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو اِن دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے ½ (بہ۲ جہ۲ + جہ۲ عہ۲ + عہ۲ بہ۲)^½ ہے۔

۷۷ - اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے راسوں سے وتروں د، د۲ پر عمود ا، بہ، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ وتروں کے درمیانی زاویہ کی جیب

$$= \left\{\frac{(\text{ا} + \text{ج})(\text{ب} + \text{د})}{\text{۲ ا د}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(223)

۷۸ - اگر ا ب ج د ایک ذواربعۃ الاضلاع ہو تو کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو زاویوں ا اور ج کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع کو زاویوں ب، اور د کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے ا د کے ساتھ حسب ذیل زاویہ بناتا ہے

$$\text{مس}^{-1} \left\{\frac{\text{جب ا} - \text{جب د} + \text{جب (ا + ب)}}{\text{۱} + \text{جم ا} + \text{جم د} + \text{جم (ا + ب)}}\right\}$$

۷۹ - ا ب ج د ع ایک مستوی مخمس ہے؛ یہ دیا گیا ہے کہ مثلثوں ع ا ب، ا ب ج، ب ج د، ج د ع، د ع ا کے رقبے علی الترتیب ا، ب، ج، د، ع کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ ا، مساوات

$$\text{ا}^{2} - (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ع})\,\text{ا} + (\text{ا ب} + \text{ب ج} + \text{ج د} + \text{د ع} + \text{ع ا}) = 0$$

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

۸۰ - اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں ایسا ہو کہ اس کے اندر ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ بڑے سے بڑا ہو گا جبکہ ذو اربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہو، اور اس صورت میں اندرونی دائرہ کے نصف قطر کا مربع ہے

$$\frac{\text{ا ب ج د}}{(\text{ا} + \text{ج})(\text{ب} + \text{د})}$$

۸۱ - ۲ ن ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہے، اِن ضلعوں میں سے ن اضلاع ا کے مساوی ہیں اور ن اضلاع ب کے مساوی۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{ا}^{2} + \text{۲ ا ب جم}\frac{\pi}{\text{ن}} + \text{ب}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{قم}\frac{\pi}{\text{ن}}$$

۸۲ - ایک ذو اربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ا، ب، ج، د ہیں ایک دائرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے؛ اس کے خارجی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے؛ ثابت کرو کہ اُس ذو اربعۃ الاضلاع کے وتر جو ان ناصفوں سے بنتا ہے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور اِس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

½ س۲ (اب + ج د) (اد + ب ج) / (ا + ج) (ب + د) √ (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د)

جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د

۸۳ - ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا تیسرا وتر ع ف ہے جو اس ا کے مقابل ہے۔ اگر ا سے ب ج، ج د پر عمود ڈالے جائیں اور یہ عمود اُن دائروں سے جو ا د، اب پر ان کو قطر مان کر کھینچے گئے ہوں نقطوں پ، ق پر ملیں تو

ثابت کرو کہ پ ق جب د = ع ف (جب۲ ا - جب۲ د)

۸۴ - ایک دوسرے کے لحاظ سے دو دائروں کی طاقت کی تعریف اُس اضافہ سے کی جاتی ہے جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے مربع کو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع پر حاصل ہے۔ مثلث اب ج کے لیے ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ اور اُس جانبی دائرہ کی طاقت جو ا کے مقابل ہے ½ {ا۲ + (ب - ج)۲} ہے اور اس سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اگر یہ جانبی دائرہ دوسرے جانبی دائرہ کو مس کرے تو مثلث کو متساوی الساقین ہونا چاہیے۔

۸۵ - ایک مخمس کے ضلع، جو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے، ترتیب وار ا، ب، ج، د، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ، مساوات

ل۴ - ل۲ س {¼ Σ ا۲ (ب + ع - ج - د) - ¼ Σ ا۳ + ½ Σ اج د}
+ (س - ا - ع) (س - ب - د) (س - ج - ع) (س - د - ا) (س - ج - ب) س۳
= ۰

(228)

کی ایک اصل ہے جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د + ع

۸۶ ۔ ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ر ہے ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچا گیا ہے ۔ اِس دائرہ کے محیط پر کسی نقطہ کے فاصلے کثیر الاضلاع کے چار متصلہ راسوں سے ا، ب، ج، د ہیں ۔ ا، ب، ج اور د کے درمیان رشتہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$ر^۲ = \frac{(ا ب - ج د)(ب ج - ا د)(ج ا - ب د)}{(ا + ب - ج - د)(ب + ج - د - ا)(ج + ا - ب - د)(ا + ب + ج + د)}$$

۸۷ ۔ ایک محدب مخمس ا ب ج د ع ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے، اس کا گھیرا اور رقبہ علی الترتیب ۲ س اور س ہیں، اور ع اور ب پر کے زاویوں کا مجموعہ عہ ہے، ا اور ج پر کے زاویوں کا مجموعہ بہ، اور وقس علیٰ ہٰذا۔ ثابت کرو کہ

$$س^۲ (جب ۲ عہ + \ldots + جب ۲ صہ) + ۲ س (جب عہ + \ldots + جب صہ)^۲ = ۰$$

۸۸ ۔ ا ب ج د ایک محدب ذوار بعتہ الاضلاع ہے جس کے ضلع ایک دائرے کو مس کرتے ہیں اور راس ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں ۔ مخمس کے حائط دائرہ کے مماس نقطوں ا، ب، ج، د پر کھینچے گئے ہیں جن سے ایک دوسرا محدب ذوار بعتہ الاضلاع بنتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس آخری ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$۲ ر^۲ \frac{(س ش - ۲ ا ب ج د)(ا ب ج د)^{\frac{۳}{۲}} ش}{(ش - ب ج د)(ش - ج د ا)(ش - د ا ب)(ش - ا ب ج)}$$

جہاں دائرہ ا ب ج د کا نصف قطر ر ہے اور ۲ س = ا + ب + ج + د، اور

$$۲ ش = ب ج د + ج د ا + د ا ب + ا ب ج$$

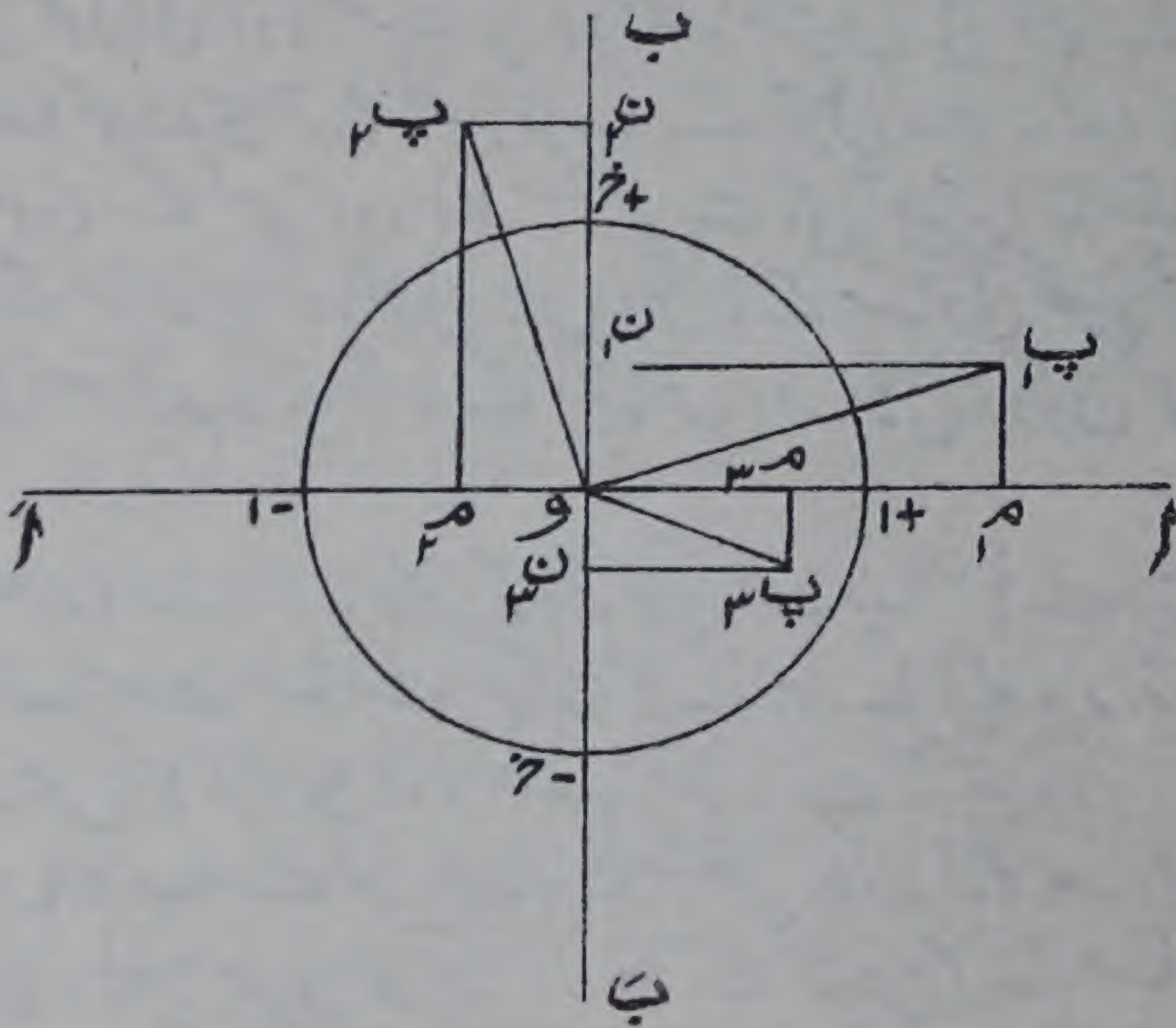
تیرھواں باب

ملتف اعداد

۱۷۰ — جبر و مقابلہ کی کتابوں میں شکل لا + خ ما کے عددوں پر جنھیں ملتف اعداد کہا جاتا ہے بحث کی جاتی ہے اور جبری اعمال کے معمولی قوانین کا ان پر اطلاق درست ثابت کیا جاتا ہے۔ ہم اس باب میں اُس طریقہ پر غور کرینگے جس میں ایسے ملتف عدد ہندسی طور پر تعبیر کیے جا سکتے ہیں اور جس میں ایسے عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب ہندسی طور پر ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ اس سلسلہ میں دائری تفاعل فطرتاً خود بخود پیش ہوتے ہیں، اور فی الواقعی ایسے تفاعلوں کا اِدخال ضروری ہے تاکہ ملتف عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم اختصاراً بیان ہو سکیں۔

ملتف عدد کی ہندسی تعبیر

۱۷۱ — ایک مثبت یا منفی حقیقی عدد کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کرتے ہیں کہ ایک ثابت لا متناہی خط مستقیم آو آ پر پیمانہ کے مطابق طول و م = | لا | کسی معروف نقطہ و سے اس کی ایک سمت یا دوسری سمت میں بموجب اس کے کہ عدد لا مثبت ہے یا منفی ناپتے ہیں؛ تب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ عدد لا یا تو م کے محل سے تعبیر ہوتا

ہے یا خطِ مستقیم و م سے۔ اب خالص خیالی عدد خ ما کو تعبیر کرنے کے لیے کسی ثابت مستوی میں جس میں اَ و ا واقع ہے ایک ثابت خطِ مستقیم ب و بَ لو جو ا و اَ پر عمود ہو، پھر بَ و ب پر و سے طول و ن = | ما | ناپو جو و ب یا و بَ کی سمت میں لیا جائے بموجب اس کے کہ ما مثبت ہو یا منفی؛ تب ہم یہ خیال کرینگے کہ خیالی عدد خ ما نقطہ ن سے تعبیر ہوتا ہے یا نیز خطِ مستقیم و ن سے۔ اکائی نصف قطر کا دائرہ خطوطِ مستقیم ا اَ اور ب بَ کو اُن نقطوں پر قطع کریگا جو عددوں ± ۱، ± خ کو تعبیر کرتے ہیں۔ ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرنے کے لیے مستطیل و م پ ن (225) کی تکمیل کرو، تب ہم یہ خیال کرینگے کہ نقطہ پ یا نیز خطِ مستقیم و پ ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ دو عددوں لا اور خ ما کا حاصل جمع ہندسی طور پر اُس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو ضلع خطوطِ مستقیم و م، و ن ہیں جو علی الترتیب لا اور خ ما کو تعبیر کرتے ہیں۔

شکل میں پ، ملتف عدد $لا_۱$ + خ $ما_۱$ کو تعبیر کرتا ہے جس میں $لا_۱$ اور $ما_۱$ دونوں مثبت ہیں؛ $پ_۲$، ملتف عدد $لا_۲$ + خ $ما_۲$ کو جس میں $لا_۲$ منفی ہے اور $ما_۲$ مثبت؛ $پ_۳$، عدد $لا_۳$ + خ $ما_۳$ کو جس میں $لا_۳$ مثبت ہے اور $ما_۳$ منفی۔ اَ و ا کو حقیقی محور کہتے ہیں اور بَ و ب کو خیالی محور۔

۱۷۲ــــ فرض کرو کہ و پ کا مطلق طول ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ، و ا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ اس کو و ا سے مخالف سمت ساعت ناپا جاتا ہے۔ تب

لا = ر جم ط، ما = ر جب ط، ی = لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جہاں $ر = \sqrt{لا^۲ + ما^۲}$، $ط = مس^{-۱} \frac{ما}{لا}$

عدد $ر = \sqrt{لا^۲ + ما^۲}$ کو جو لازمی طور پر مثبت عدد ہے ملتف عدد لا + خ ما کا **مقیاس** کہتے ہیں اور زاویہ ط کو اس ملتف عدد کی **دلیل یا وجہ**۔

پس خطِ مستقیم و پ جو اس مستوی میں و سے کسی سمت میں ناپا گیا ہو مطلق طول کی اور سمیت کی دو خصوصیتوں کی وجہ سے ایک ملتف عدد کو پوری طرح تعبیر کرنے کے قابل ہے۔ عدد لا + خ ما کو اس مستوی کے کسی اور خطِ مستقیم سے بھی تعبیر کیا جا سکتا ہے جو و پ کے متوازی اور طول میں اس کے مساوی کھینچا گیا ہو کیونکہ ایسا خطِ مستقیم لا + خ ما کے مقیاس اور دلیل دونوں کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷۳ــــ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ، اَ سے ابتدا کر کے اور مخالف سمت ساعت حرکت کرتے ہوئے ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے؛ تب اس ملتف عدد کا مقیاس جو پ سے تعبیر ہوتا ہے مستقل اور ر کے مساوی رہتا ہے لیکن دلیل جبری طور پر − π سے شروع کر کے مسلسل

بڑھتی جاتی ہے ۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ نقطہ پ دائرہ میں متعدد مکمل گردشیں کر چکا ہے، تب ہر دفعہ جب وہ کسی ثابت مقام پ۱ سے گذرتا ہے ملتف عدد لا + خ ما کی وہی قیمت ہوتی ہے، یعنی اس کی دلیل میں ۲ π کے ضِعف کے اضافہ سے یہ ملتف عدد نہیں بدلتا۔ بہ الفاظ دیگر متغیر

لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جس کو اس کے مقیاس ر اور اس کی دلیل ط کا تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے دلیل کے لحاظ سے دَوری (Periodic) ہے۔

کسی عدد لا + خ ما کے لیے ط کی اُس قیمت کو جو ـ π اور π کے درمیان واقع ہوتی ہے **دلیل کی صدر قیمت** کہہ سکتے ہیں ؛ اور ہم بالعموم ایسے عدد کی دلیل کا جب ذکر کرینگے تو اس سے مُراد یہی صدر قیمت ہوگی ۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دلیل ط کی صدر قیمت کا مس‌ا ما/لا کی صدر قیمت ہونا ضروری نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۳۸)، کیونکہ لا + خ ما کی ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں جم ط اور جب ط دونوں کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں اور اس لیے ط کی صرف ایک قیمت ـ π اور π کے درمیان ہوتی ہے ۔

اِس مفہوم میں ایک مُثبت حقیقی عدد کی دلیل صفر ہے اور ایک مُثبت خیالی عدد کی دلیل ½ π ہے اور ایک منفی خیالی عدد کی دلیل ـ ½ π، لیکن منفی حقیقی عدد کی دلیل کی صدر قیمت حسب تعریف بالا مبہم ہے کیونکہ یہ π ہے یا ـ π، لیکن ہم اس کو π ہی خیال کرینگے ۔ مزدوج اعداد لا + خ ما، لا ـ خ ما کے مقیاس تو ایک ہی ہوتے ہیں لیکن اِن کی دلیلیں ط اور ـ ط ہیں۔

لا + خ ما کے مقیاس کو اکثر مق (لا + خ ما) سے یا |لا + خ ما| سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۴۷ ـــ اس امر کا مشاہدہ کرنا بنیادی اہمیت رکھتا ہے کہ حقیقی متغیر لا جبکہ لا۱ سے لا۲ تک مسلسل بڑھتا ہے تو وہ صرف قیمتوں کے

ایک جہت میں سے گذر سکتا ہے، لیکن ملتف متغیر لا + خ ما کی یہ کیفیت نہیں ہے۔ یہ فرض کر کے بھی کہ لا اور ما دونوں مسلسل بڑھتے ہیں لاانتہا طریقے ہیں جن میں ملتف متغیر لا + خ ما قیمت لا۱ + خ ما۱ سے لا۲ + خ ما۲ تک مسلسل بدل سکتا ہے کیونکہ لا۱ سے لا۲ تک لا کا مسلسل اضافہ ما۱ سے ما۲ تک ما کے مسلسل اضافہ کے تابع نہیں ہے۔ یہ امر اس واقعہ میں لازمی طور پر شامل ہے کہ ملتف عدد میں دو الگ الگ اکائیاں پائی جاتی ہیں اور اس واقعہ کی یہ ہندسی تعبیر ہے کہ شکل میں دو نقطے پ۱ اور پ۲ لاانتہا طریقوں سے ایک دوسرے سے ملائے جا سکتے ہیں کیونکہ متغیر کو تعبیر کرنیوالا نقطہ، پ۱ اور پ۲ کو ملانیوالے کسی اختیاری منحنی پر حرکت کر سکتا ہے۔ اگر ایک حقیقی متغیر کو ہمیشہ حقیقی رہتے ہوئے لا۱ سے لا۲ تک بڑھنا ہے تو متغیر کو تعبیر کرنیوالے نقطہ کی حرکت محور لا میں متقید ہو جاتی ہے؛ اگر متغیر پر یہ قید نہ ہو کہ اس کی درمیانی قیمتیں حقیقی ہوں تو اس کو تعبیر کرنیوالا نقطہ کسی اختیاری منحنی کو مرتسم کر سکتا ہے جو محور لا پر کے ان دو نقطوں کو ملا سکتا ہے۔ (227)

ہم اس نکتہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک خالص حقیقی یا خالص خیالی عدد لازماً یک بعدی ہے، لیکن ایک ملتف عدد دو بعدی ہے اور اس لیے اس کی ہندسی تعبیر کے لیے دو بعدی فضاء چاہیے۔

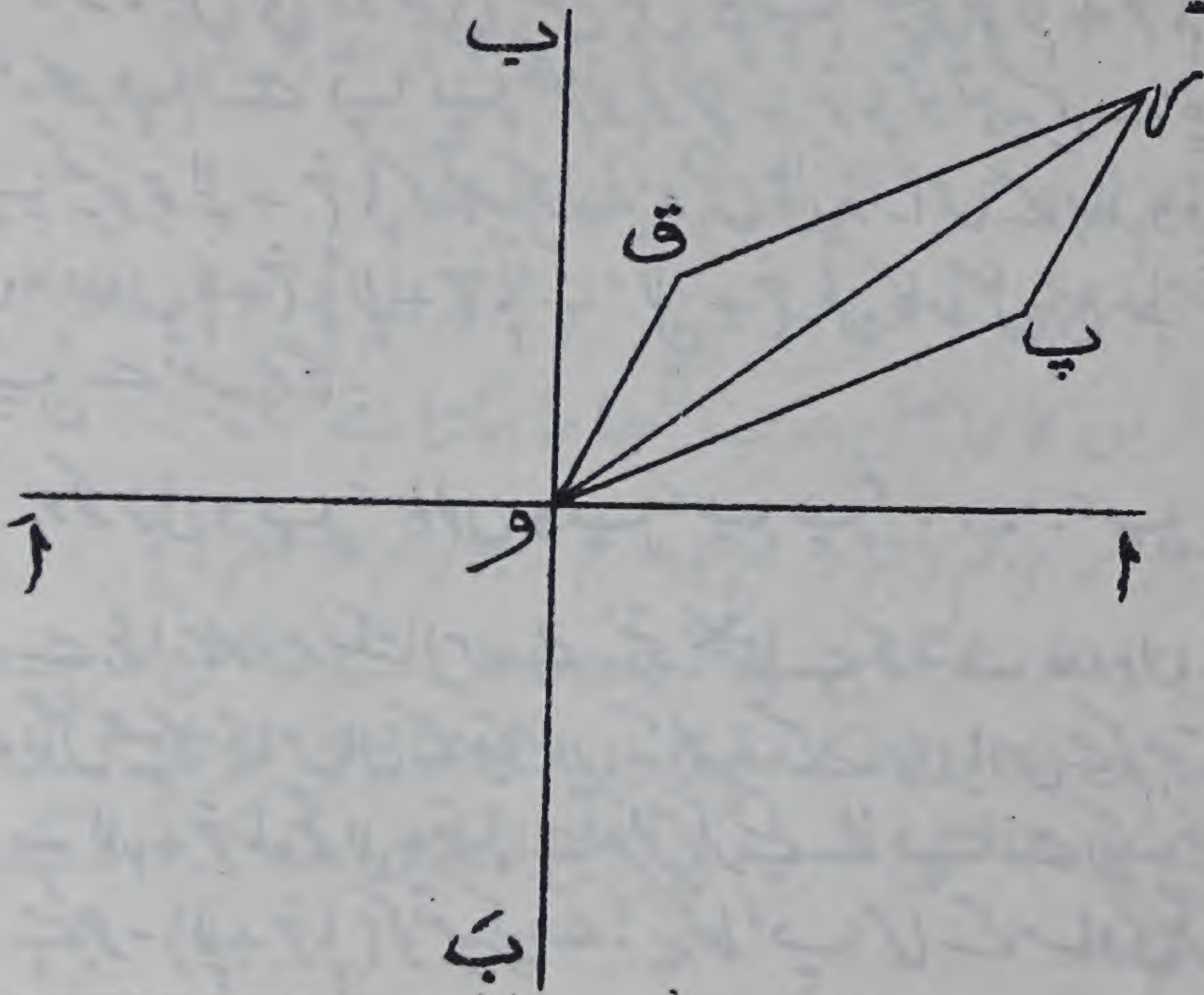
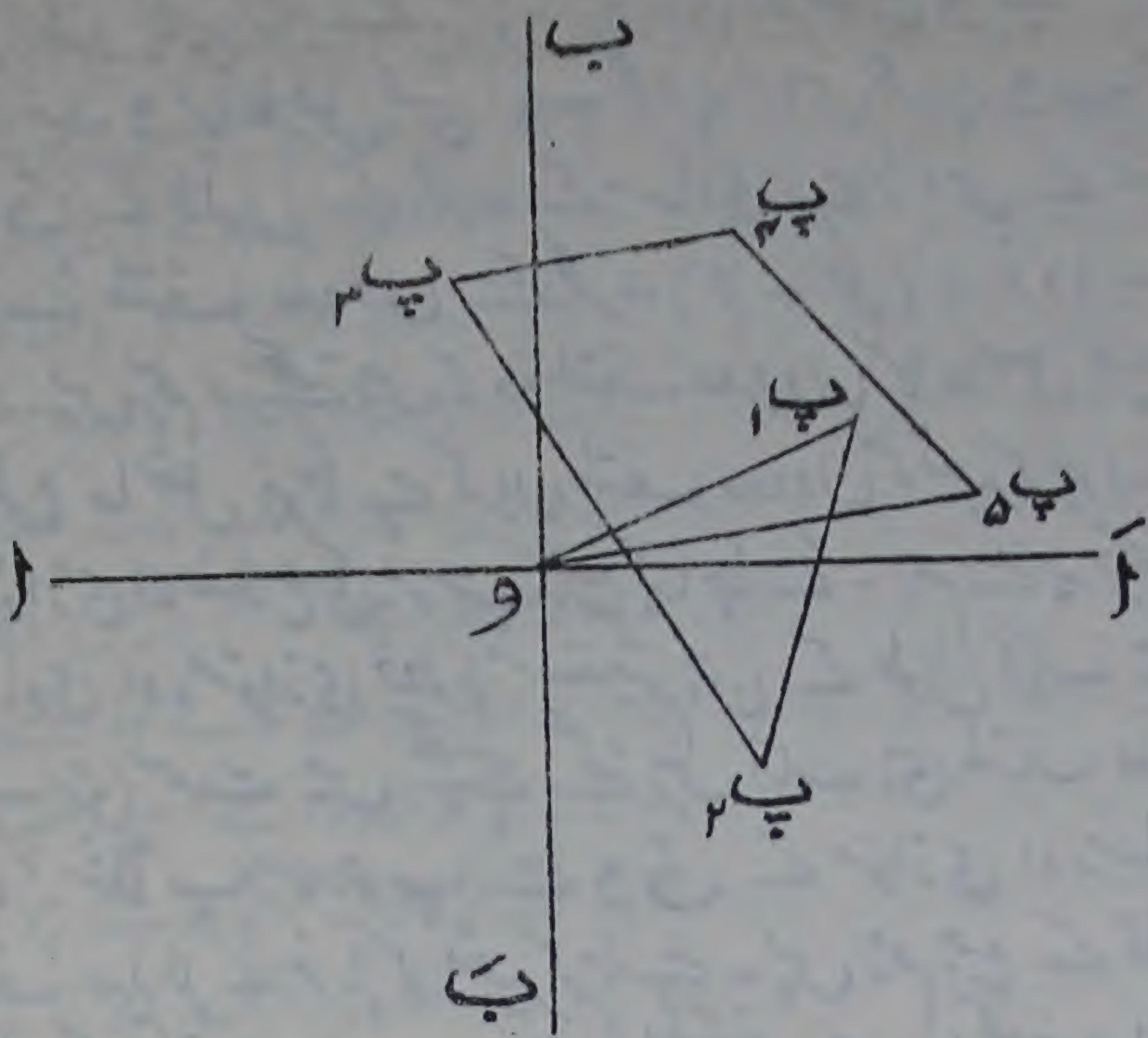
ملتف عددوں کو ہندسی طور پر تعبیر کرنیکا طریقہ ارگنڈ (Argand) نے ایک مقالہ میں جو ۱۸۰۶ء میں شائع ہوا تھا دیا تھا لیکن اس سے قبل ۱۷۵۰ء میں کہوں (kühn) نے ان کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کی سعی کی تھی۔ تعبیر کے اس طریقہ پر جو نظریہ قائم ہوا ہے اس کی توسیع و ترقی کوشی[1]، گاس[2]، ریمن[3] اور دوسروں نے کی۔ یہ نظریہ تفاعلوں کے موجودہ نظریہ کی بنیاد ہے۔

ملتف عددوں کی جمع

۱۷۵ — فرض کرو کہ دو ملتف عددوں لا۱ + خ ما۱، لا۲ + خ ما۲ کو

ے[1] Cauchy
ے[2] Gauss
ے[3] Riemann

نقطے پ، ق تعبیر کرتے ہیں: متوازی الاضلاع و پ ر ق کی تکمیل کرو: تب و ر کا ظل کسی ایک محور پر، اس محور پر و پ، پ ر یا و پ، و ق کے ظلّوں کے مجموعہ کے مساوی ہے: اس لیے نقطہ ر دو دئے ہوئے ملتف عددوں کے مجموعہ (لا$_1$ + لا$_2$) + خ(ما$_1$ + ما$_2$) کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دو ملتف عددوں کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ اِن ملتف عددوں کو تعبیر کرنیوالے خطوطِ مستقیم کو قانونِ متوازی الاضلاع کی بموجب جمع کیا جائے۔ ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ وہ مساوی اور متوازی خطوطِ مستقیم جن کے طول ایک ہی ہیں اور جو ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ایک ہی ملتف عدد کو تعبیر کرتے ہیں، مثلاً پ ر جو پ سے و ق کے متوازی اور مساوی کھینچا گیا ہے ملتف عدد لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم جمع کے قاعدے کو یوں بیان کرسکتے ہیں :- و سے خطِ مستقیم و پ کھینچو جو لا$_1$ + خ ما$_1$ کو تعبیر کرے اور پھر پ سے پ ر کھینچو جو لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرے: و ر کو ملاؤ: تب و ر، یا نقطہ ر، حاصل جمع (لا$_1$ + لا$_2$) + خ(ما$_1$ + ما$_2$) کو تعبیر کریگا۔

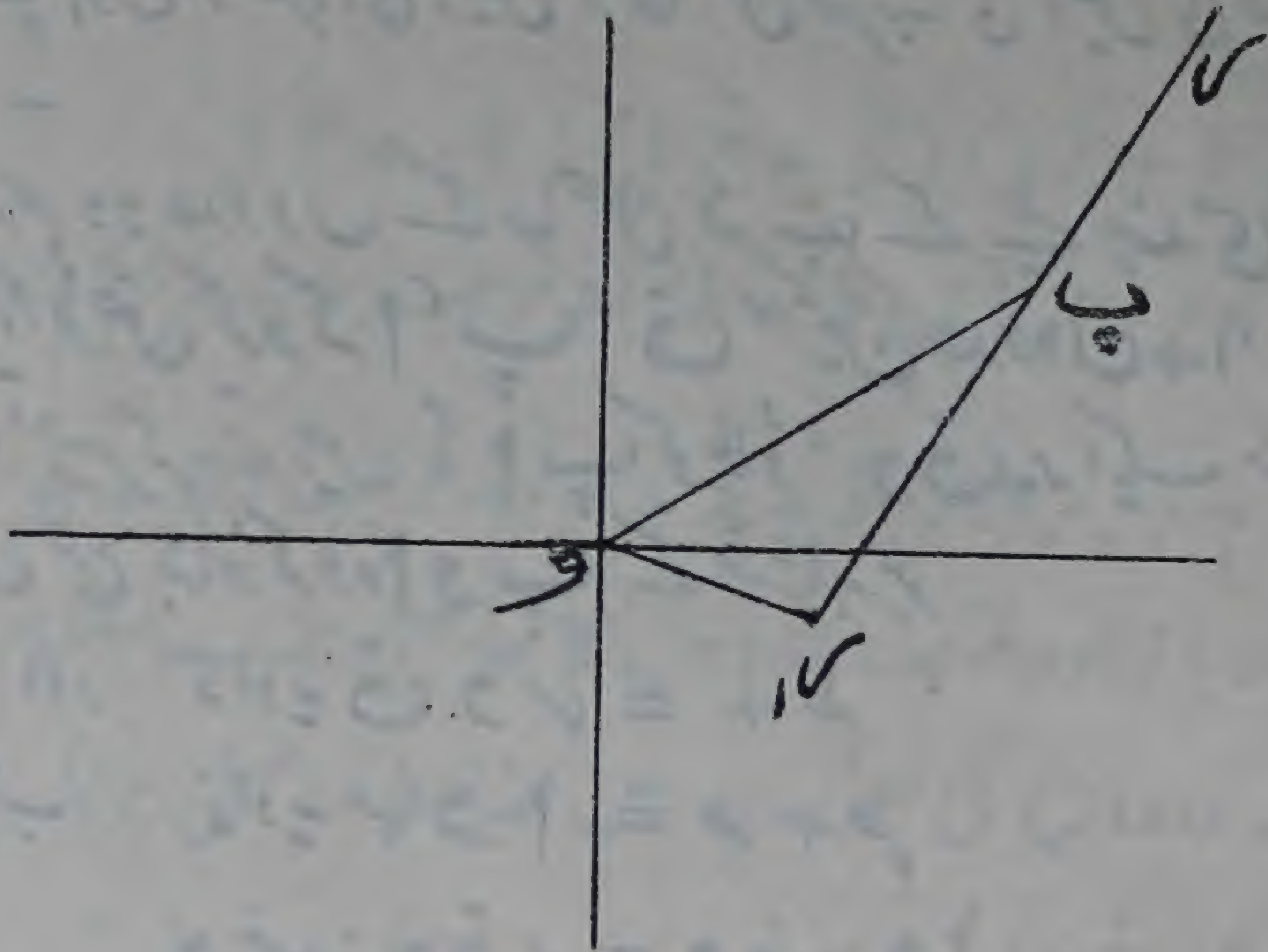
(228)

(229)

۱۷۶ — جمع کا جو طریقہ اوپر بیان کیا گیا ہے اس کی توسیع اعداد کے کسی جٹ کے لیے ہو سکتی ہے۔

دفعہ ماقبل کی دوسری شکل میں وپ$_{1}$ کھینچو جو لا$_{1}$ + خ ما$_{1}$ کو تعبیر کرے، پھر پ$_{1}$ سے پ$_{1}$پ$_{2}$ کھینچو جو لا$_{2}$ + خ ما$_{2}$ کو تعبیر کرے، پھر پ$_{2}$ سے پ$_{2}$پ$_{3}$ کھینچو جو لا$_{3}$ + خ ما$_{3}$ کو تعبیر کرے، وقس علیٰ ہذا۔ اس کے بعد وپ$_{n}$ کو ملاؤ۔ تب ان عددوں لا$_{1}$ + خ ما$_{1}$، لا$_{2}$ + خ ما$_{2}$، ...، لا$_{n}$ + خ ما$_{n}$ کا حاصل جمع خطِ مستقیم وپ$_{n}$ یا نقطہ پ$_{n}$ سے تعبیر ہو گا۔

چونکہ طول وپ$_{n}$، طولوں وپ$_{1}$، پ$_{1}$پ$_{2}$، ...، پ$_{n-1}$پ$_{n}$ کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف عددوں کے ایک جٹ کے حاصل جمع کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ کے مساوی یا اس سے کم ہوتا ہے۔

۱۷۷ — لا$_{2}$ + خ ما$_{2}$ کو لا$_{1}$ + خ ما$_{1}$ سے تفریق کرنے کے لئے پ$_{1}$ سے ایک خط پ$_{1}$ر$_{1}$ کھینچنا چاہئے جو -(لا$_{2}$ + خ ما$_{2}$) کو تعبیر کرے۔ یہ خط پ$_{1}$ر$_{1}$ کے مساوی مگر مخالف

سمت میں ہوگا۔ تب مطلوبہ حاصل تفریق یا فرق خط و ر$_1$ سے یا نقطہ ر$_1$ سے تعبیر ہوگا۔

ملتف عددوں کی ضرب

۱۷۸ — دو عددوں لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کا حاصل ضرب ہے

(لا$_1$ لا$_2$ − ما$_1$ ما$_2$) + خ (لا$_1$ ما$_2$ + لا$_2$ ما$_1$)

اور اگر ہم لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کی بجائے

ر$_1$ (جم ط$_1$ + خ جب ط$_1$)، ر$_2$ (جم ط$_2$ + خ جب ط$_2$)

رکھیں تو ان کا حاصلِ ضرب لکھا جا سکتا ہے

ر$_1$ ر$_2$ {جم (ط$_1$ + ط$_2$) + خ جب (ط$_1$ + ط$_2$)}

اِس جملہ سے ظاہر ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اِن عددوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے اور حاصل ضرب کی دلیل دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

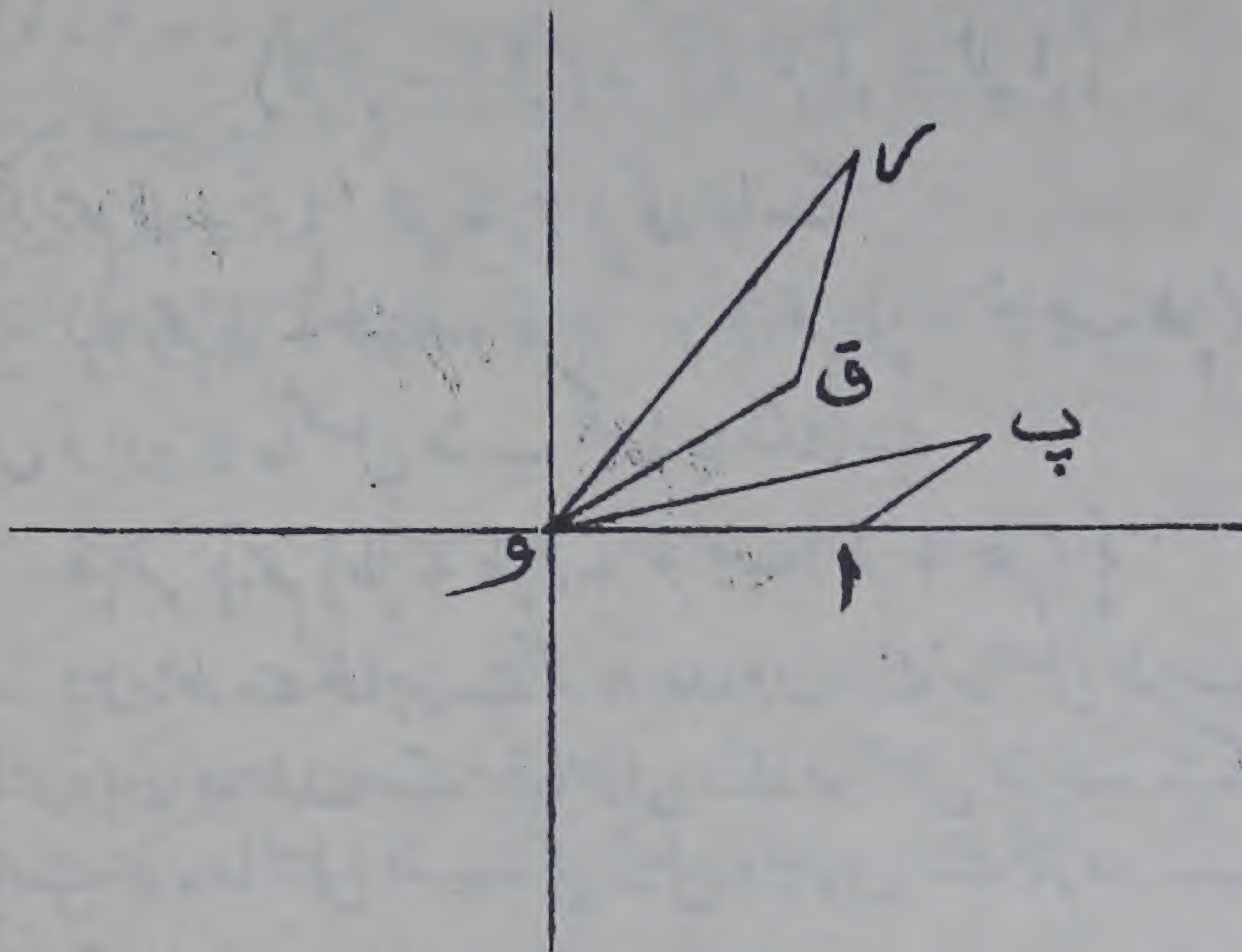
تاہم یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کی دلیلوں کی صدر قیمتیں ط$_1$، ط$_2$ ہوں تو ضروری نہیں کہ حاصل ضرب کی دلیل کی صدر قیمت ط$_1$ + ط$_2$ ہو۔

اب، ہم دو عددوں کے حاصل ضرب کے لیے ہندسی عمل حاصل کر سکتے ہیں: فرض کرو کہ ا، پ، ق، تین عددوں ۱+۰، لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرتے ہیں: اپ کو ملاؤ، وق پر ایک مثلث ق و ر اس طرح بناؤ کہ وہ ا و پ کے متشابہ ہو

اور　زاویہ ق و ر = + ط$_1$،

تب　زاویہ ر و ا = ط$_1$ + ط$_2$

اور نیز　و ر : و ق = و پ : و ا

پس و ر کا طول طولوں و پ اور و ق کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ ر، حاصل ضرب (لا$_1$ + خ ما$_1$) × (لا$_2$ + خ ما$_2$) کو تعبیر کرتا ہے۔

اب اگر ہم ایک تیسرا جزو ضربی $\text{لا}_3 + \text{خ ما}_3 = \text{م}_3(\text{جم ط}_3 + \text{خ جب ط}_3)$ شامل کریں تو

$$(\text{لا}_1 + \text{خ ما}_1)(\text{لا}_2 + \text{خ ما}_2)(\text{لا}_3 + \text{خ ما}_3)$$

$$= \text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3\{\text{جم}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2) + \text{خ جب}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)\}\{\text{جم ط}_3 + \text{خ جب ط}_3\}$$

$$= \text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3\{\text{جم}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \text{ط}_3) + \text{خ جب}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \text{ط}_3)\}$$

اسی طرح چار یا زیادہ ملتف عددوں کا حاصل ضرب معلوم ہو سکتا ہے۔

(231)

ن ملتف عددوں کی صورت میں ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لا}_1 + \text{خ ما}_1)(\text{لا}_2 + \text{خ ما}_2)\cdots(\text{لا}_\text{ن} + \text{خ ما}_\text{ن})$$

$$= \text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3\cdots\text{م}_\text{ن}\{\text{جم}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \cdots + \text{ط}_\text{ن}) + \text{خ جب}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \cdots + \text{ط}_\text{ن})\} \quad \ldots\ldots(1)$$

یا ملتف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کا مقیاس اِن کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے اور ان کے حاصل ضرب کی دلیل اِن کی دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ ملتف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے مذکورۂ بالا دو عددوں کے حاصل ضرب کے طریقے کی تکرار عمل میں لائی جا سکتی ہے۔

ایک ملتف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا

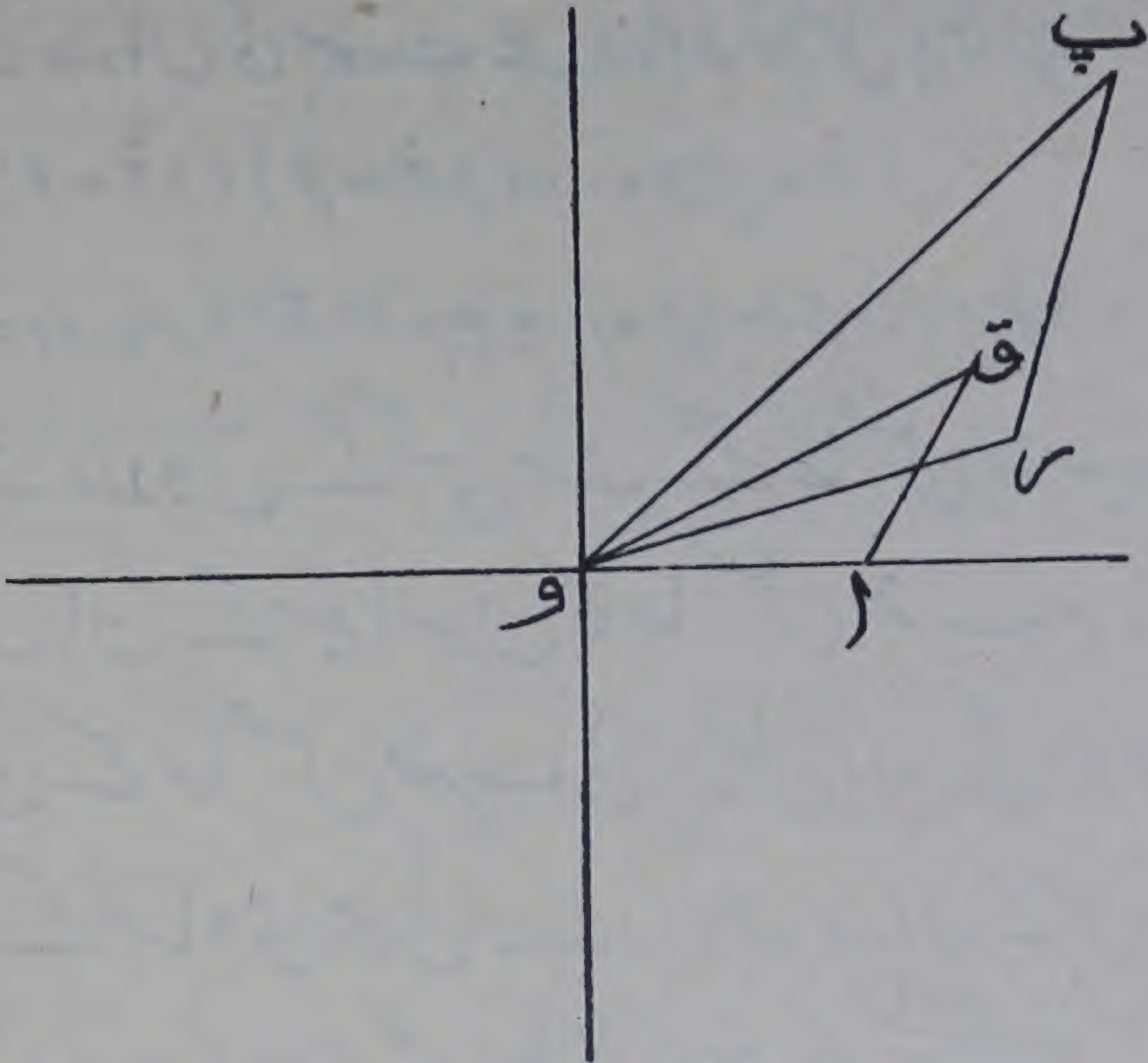
۱۷۹ — خارج قسمت $(\text{لا}_1 + \text{خ ما}_1) \div (\text{لا}_2 + \text{خ ما}_2)$

$$= \frac{1}{\text{ر}_2^2}\left\{\text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{ما}_1\,\text{ما}_2 - \text{خ}\left(\text{لا}_1\,\text{ما}_2 - \text{لا}_2\,\text{ما}_1\right)\right\}$$

یا

$$= \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2}\left\{\text{جم}\left(\text{ط}_1 - \text{ط}_2\right) + \text{خ جب}\left(\text{ط}_1 - \text{ط}_2\right)\right\}$$

پس دو عددوں کے خارج قسمت کا مقیاس ان کے مقیاسوں کا خارج قسمت ہوتا ہے اور خارج قسمت کی دلیل ان کی دلیلوں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے۔

خارج قسمت کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے نقطہ ق $(\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2)$ کو نقطہ ا (+۱) سے ملاؤ، اور مثلث و ر پ کو اس طور پر بناؤ کہ مثلث و ا ق کے متشابہ ہو اور زاویہ ر و پ کا ناپ − ط_2 ہو۔ تب زاویہ ر و ا $= \text{ط}_1 - \text{ط}_2$ اور و ر $= \frac{\text{و پ}}{\text{و ق}}$ اس لیے نقطہ ر حاصل تقسیم یا خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔ (232)

ملتف عددوں کی قوتیں

۱۸۰ ـــــــ اگر مساوات (۱) میں دائیں جانب کے سب اجزائے ضربی کو لا + خرما کے مساوی رکھیں تو ضابطہ ملتا ہے

(لا + خرما)^ن = ر^ن (جم ن ط + خرجب ن ط)

پس کسی ملتف عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس اِس دیے ہوئے عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت کے برابر ہے اور اِس کی دلیل دیے ہوئے عدد کی دلیل کی ن گنا ہے۔ عدد ن سے یہاں کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے۔

ملتف عدد کی کسی مثبت قوت کی قیمت ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ پ۱ (لا + خرما) کو ا (+ ۱) سے ملایا گیا ہے؛ وپ۱ پر مثلث وپ۱پ۲ بناؤ جو و ا پ۱ کے تشابہ ہو، وپ۲ پر مثلث وپ۲پ۳ بناؤ جو اُسی مثلث کے تشابہ ہو، اور علیٰ ہذا القیاس۔ تب وپ۱، وپ۲، وپ۳، ...، وپن کے طول علی الترتیب ر، ر^۲، ر^۳، ...، ر^ن ہیں اور زاویے پ۱و ا، پ۲و ا، ... پن و ا علی الترتیب ط، ۲ط، ... ن ط ہیں پس نقطے پ۱، پ۲، ... پن علی الترتیب عددوں (لا+خرما)، (لا+خرما)^۲، ...، (لا + خرما)^ن کو تعبیر کرتے ہیں۔

مخصوص صورت ر = ۱ میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

(جم ط + خرجب ط)^ن = جم ن ط + خرجب ن ط

اور اگر ق۱ سے جم ط + خرجب ط تعبیر ہو تو نقطے ق۱، ق۲، ...، قن جو جم ط × خرجب ط کی مختلف قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں اکائی نصف قطر کے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور اس طرح کہ کسی دو متصل نقطوں کے

کے درمیان جو قوس ہے اُس کے محاذی مرکز د پر زاویہ ط بنتا ہے۔

۱۸۱ــــ قوت نماؤں کے نظریہ کے مطابق اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ سے وہ عدد تعبیر ہوتا ہے جس کی ن ویں قوت لا+خ ما ہے۔ اب چونکہ کسی عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت اُس عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس ہے اور چونکہ ہر عدد کا مقیاس حقیقی اور مثبت ہوتا ہے اس لیے $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کا مقیاس $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$ ہے جہاں $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$، مقیاس ر کا حقیقی مثبت ن واں جذر ہے۔ فرض کرو کہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی ایک قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\,(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ})$ ہے تو

$$\text{ر}\,(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ})^{\text{ن}} = \text{ر}\,(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})$$

یا

$$\text{جم ن فہ} + \text{خ جب ن فہ} = \text{جم ط} + \text{خ جب ط} \qquad (233)$$

اس لیے $\text{جم ن فہ} = \text{جم ط}$، $\text{جب ن فہ} = \text{جب ط}$

یا

$$\text{ن فہ} = \text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi$$

جہاں س کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے بشمول صفر۔ پس

$$(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

کی ایک قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right\}$ ہے

کیونکہ اس جملہ کی ن ویں قوت لا + خ ما کے مساوی ہے۔ اوپر کے استدلال سے یہ ظاہر ہے کہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی ہر قیمت مندرجۂ بالا شکل کی ہونی چاہیے۔ اگر س کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ن-۱ دی جائیں تو ان قیمتوں میں سے ہر ایک کے لیے

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}$$

کی قیمت مختلف ہوگی کیونکہ س کی دو قیمتوں $س_1$، $س_2$ کے لیے اس جملہ کی مساوی قیمتیں ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

$$\text{جم}\,\frac{ط+2س_1\pi}{ن} = \text{جم}\,\frac{ط+2س_2\pi}{ن}$$

اور

$$\text{جب}\,\frac{ط+2س_1\pi}{ن} = \text{جب}\,\frac{ط+2س_2\pi}{ن}$$

یعنی

$$\frac{ط+2س_1\pi}{ن} = 2ک\pi = \frac{ط+2س_2\pi}{ن}$$

یا

$$س_1 - س_2 = ن\,ک$$

جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ لیکن یہ ناممکن ہے اگر $س_1$ اور $س_2$ دونوں مختلف اور ن سے کم ہیں۔ اس لیے مذکورہ بالا قیمتیں سب کی سب مختلف ہیں۔

اگر ہم س کو دوسری قیمتیں دیں جو صفر اور ن-۱ کے درمیان واقع نہ ہوں تو ان سے $(\text{جم}\,ط + خ\,\text{جب}\,ط)^{\frac{1}{ن}}$ کی کوئی اور قیمتیں حاصل نہیں ہونگی کیونکہ اگر س کی ایسی کوئی قیمت $س_2$ ہو تو صفر اور ن-۱ کے درمیان ایک عدد $س_1$ کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے ایسا کہ $س_1 - س_2$، ن کا ایک ضعف ہو، اور اس لیے جملہ بالا کی قیمت $س = س_1$ کے لیے وہی ہے جو $س = س_2$ کے لیے ہے۔

پس، ہم دیکھتے ہیں کہ $(لا + خ\,ما)^{\frac{1}{ن}}$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\sqrt[ن]{ر}\left(\text{جم}\,\frac{ط}{ن} + خ\,\text{جب}\,\frac{ط}{ن}\right)،\ \sqrt[ن]{ر}\left(\text{جم}\,\frac{ط+2\pi}{ن} + خ\,\text{جب}\,\frac{ط+2\pi}{ن}\right)$$

$$\ldots،\ \sqrt[ن]{ر}\left\{\text{جم}\,\frac{ط+2(ن-1)\pi}{ن} + خ\,\text{جب}\,\frac{ط+2(ن-1)\pi}{ن}\right\}،$$

سے ملتی ہیں جو ن اعداد پر مشتمل ہے اور جس میں $\sqrt[ن]{ر}$ حقیقی اور مثبت ہے۔

۱۸۲۔ اگر لا + خ ما کی دلیل کی صدر قیمت ط ہو یعنے دلیل کی وہ قیمت جو - π اور π کے درمیان واقع ہے تو ہم (لا + خ ما)$^{\frac{1}{ن}}$ کی صدر قیمت کو جملہ

(234)

$$\sqrt[ن]{ر}\ (\text{جم}\ \frac{ط}{ن} + \text{خ جب}\ \frac{ط}{ن})$$

تصور کر سکتے ہیں۔ اب جملوں جم ط + خ جب ط، جم (ط + ۲ π) + خ جب (ط + ۲ π)، ... کے ن ویں جذروں کی صدر قیمتیں جم $\frac{ط}{ن}$ + خ جب $\frac{ط}{ن}$، جم $\frac{ط + ۲π}{ن}$ + خ جب $\frac{ط + ۲π}{ن}$، ... متصور ہو سکتی ہیں۔ اس لیے (لا + خ ما)$^{\frac{1}{ن}}$ کی مختلف قیمتیں ر اور ط کے متناظر جملوں کی صدر قیمتیں ہیں جب کہ دلیل ط کی ن مختلف قیمتیں لیجائیں۔ (لا + خ ما)$^{\frac{1}{ن}}$ کی صدر قیمت سے وہ جملہ مراد ہے جس میں ط کی صدر قیمت لی گئی ہے۔

اگر ا ایک مثبت حقیقی مقدار ہے تو ا$^{\frac{1}{۲}}$ کی دو قیمتیں $\sqrt{ا}$ (جم ۰ + خ جب ۰) اور $\sqrt{ا}$ (جم π + خ جب π) ہیں یعنے $\sqrt{ا}$ اور $-\sqrt{ا}$ جہاں ا کا مثبت جذر المربع $\sqrt{ا}$ ہے،

(- ا)$^{\frac{1}{۲}}$ کی قیمتیں جس میں ط = π، یہ ہیں $\sqrt{ا}$ (جم $\frac{1}{۲}$ π + خ جب $\frac{1}{۲}$ π)،

$\sqrt{ا}$ (جم $\frac{۳}{۲}$ π + خ جب $\frac{۳}{۲}$ π)

یا خ $\sqrt{ا}$، - خ $\sqrt{ا}$، ا$^{\frac{1}{۲}}$ کی صدر قیمت $\sqrt{ا}$ ہے اور (- ا)$^{\frac{1}{۲}}$ کی صدر قیمت خ $\sqrt{ا}$

۱۸۳۔ دفعہ ۱۸۱ کے جملوں میں ر = ۱، ط = ۰ رکھنے سے

ایک کے ن ویں جذر حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے یہ جذر ہیں

$$۱،\ \text{جم}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}}،\ \text{جم}\ \frac{۴\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{۴\pi}{\text{ن}}،\ \ldots$$

$$\ldots،\ \text{جم}\ \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

اب اگر ہم جذر $\text{جم}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{۲\pi}{\text{ن}}$ کو سہ سے تعبیر کریں تو اوپر کے سب جذر

$$۱،\ \text{سہ}،\ \text{سہ}^{۲}،\ \ldots\ \text{سہ}^{\text{ن}-۱}$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اب چونکہ

$$\text{جم}\ \frac{\text{ط}+۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{\text{ط}+۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} = \left(\text{جم}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right) \times \left(\text{جم}\ \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{لا} + \text{خ ما}}$ سے تعبیر ہو تو $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{لا} + \text{خ ما}}،\ \text{سہ}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{لا} + \text{خ ما}}،\ \text{سہ}^{۲}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{لا} + \text{خ ما}}،\ \ldots،\ \text{سہ}^{\text{ن}-۱}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{لا} + \text{خ ما}}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثالیں

(۱) $(-۱)^{\frac{۱}{۵}}$ اور نیز $(-۱)^{\frac{۱}{۶}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۲) $(۱ + \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(285)

۱۸۴ ——— اب ہم یہ دکھائینگے کہ ایک ملتف عدد کے ن ویں جذروں کو ہندسی طور پر کس طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے؛ اِس ہندسی طریقہ سے ن ویں جذر کی ن مختلف قیمتوں کے وجود کا خود بخود ثبوت مل جائیگا۔ عمومیت کو نقصان پہنچائے بغیر ہم مقیاس کو ایک (اکائی) فرض کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں جملہ $(\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی قیمتیں تعبیر کرنی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ پ، ا سے جس پر ط = ۰، چلتا ہے اور اکائی نصف قطر کا دائرہ مرتسم کرتا ہے، تب پ کے کسی محل میں جس کے لیے زاویہ پ و ا جو و پ سے مرتسم ہوا ہے ط ہے نقطہ پ، جملہ جم ط + خر جب ط کو تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دوسرا نقطہ پَ، ا سے اُسی آن چلتا ہے جس آن پ نکلا ہے اور فرض کرو کہ اس کی زاویئی رفتار ہمیشہ پ کی رفتار کا $\frac{1}{\text{ن}}$ رہتی ہے اور اس لیے زاویہ پَ و ا ہمیشہ $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کے مساوی رہتا ہے۔ تب پَ $\text{جم} \frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خر جب} \frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کو تعبیر کرتا ہے۔ جب، پ اولاً کسی محل پ_1 پر پہنچتا ہے تو

فرض کرو کہ پ، $پ_1$ پر پہنچتا ہے، تب زاویہ $پ_1$ و ا، زاویہ $پ_1$ و ا کا ن گنا ہے۔ اس لیے $پ_1$ اُس عدد کی ن ویں قوت کو تعبیر کرتا ہے جو $پ_1$ سے تعبیر ہوتا ہے، یا اس کے بالعکس $پ_1$، (جم $ط_1$ + خ جب $ط_1$) کے ن ویں جذر کو تعبیر کرتا ہے۔ اب فرض کرو کہ پ دائرہ کے گرد حرکت کرتا ہے تا آنکہ وہ پھر $پ_1$ پر پہنچتا ہے اور اس طرح زاویہ $ط_1 + 2\pi$ مرتسم کرتا ہے، تب $پ_1$، $پ_2$ پر پہنچیگا جہاں $پ_2$ و ا = ($ط_1 + 2\pi$) \ ن۔ پھر اگر پ دوسری مکمل گردش کرے اور پ، $پ_1$ پر پہنچے تو پ، $پ_3$ پر ہوگا جہاں $پ_3$ و ا = ($ط_1 + 4\pi$) \ ن اور علیٰ ہذا القیاس۔ نقطے $پ_1$، $پ_2$، .....، $پ_ن$ ایک ایسے منتظم کثیر الاضلاع کے راس ہونگے جو اِس دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہو اور جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہو۔ جب پ، و کے گرد ن سے زیادہ مکمل گردشیں کرتا ہے تو نقطہ پ، محلوں $پ_1$، $پ_2$، $پ_3$، ... پر مکرر پہنچتا ہے۔ نقطوں $پ_1$، $پ_2$، ...، $پ_ن$ میں سے ہر نقطہ، (جم $ط_1$ + خ جب $ط_1$)$^{\frac{1}{ن}}$ کی ایک قیمت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ

(236)

اِن نقطوں میں سے کسی نقطہ سے جو جملہ تعبیر ہوتا ہے اُس کی ن ویں قوت وہ جملہ ہے جو نقطہ پ سے تعبیر ہوتا ہے۔ نقطہ $پ_1$ اُس قیمت کو تعبیر کرتا ہے جو چھوٹی سے چھوٹی دلیل $ط_1$ کے لیے ہے۔ پس ہمیں (جم $ط_1$ + خ جب $ط_1$)$^{\frac{1}{ن}}$ کی ن قیمتیں حاصل ہو چکیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ قیمتیں، جم $\frac{ط_1 + 2س\pi}{ن}$ + خ جب $\frac{ط_1 + 2س\pi}{ن}$ کی مختلف قیمتیں ہیں جبکہ س = ۰، ۱، ۲، .....، ن - ۱

۱۸۵ ـــــ کسی عدد لا + خ ما کے ن ویں جذروں کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ (۱) ہم ایک زاویہ کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کر سکیں اور (۲) ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچ سکیں، اور (۳) مقیاس کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ہم ایک خطِ مستقیم بنا سکیں جس کا طول ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کے طول کا ن واں جذر ہو۔ اکائی (ایک) کے تمام ن ویں جذر

معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ ان ہندسی سوالات میں سے دوسرے کو حل کیا جائے کیونکہ اس صورت میں وہ زاویہ صفر ہے جس کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ پس ایک دیے ہوئے دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچنے کا سوال اِس سوال کے مماثل ہے کہ مساوات لاⁿ - ۱ = ۰ کی اصلوں کی عددی قیمتیں حاصل کی جائیں۔ یہ ہندسی سوال حسب ذیل صورتوں میں ایک طریقہ سے حل ہو سکتا ہے جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائروں کی ساخت کا عمل شامل ہے:-

(۱) جبکہ ن، ۲ کی کوئی قوت ہو مثلاً جبکہ ن = ۴، ۸، ۱۶، ۳۲

(۲) جبکہ ن، شکل ۲^م + ۱ کا ایک مفرد عدد ہو مثلاً جبکہ ن = ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷
اس کو گاس نے اپنی کتاب "Disquisitiones arith." میں ثابت کیا تھا۔

(۳) جبکہ ن، شکل ۲^م + ۱ کے متعدد مفرد عددوں اور ۲ کی کسی قوت کا حاصل ضرب ہو مثلاً جبکہ ن = ۱۵، ۸۵، ۲۵۵

گاس کے مسئلہ کا ثبوت اگر ہم دینے بیٹھیں تو عددوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہمیں جانا ہوگا؛ تاہم ہم نے دفعہ ۸۵ مثال (۴) میں مخصوص صورت ن = ۱۷ پر بحث کی ہے جہاں جب $\frac{\pi}{17}$ کو ایک ایسی شکل میں جو جذروں پر مشتمل ہے معلوم کیا گیا ہے۔

(237)

ڈیموائر کا مسئلہ

۱۸۶ — م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جم م طہ + خ جب م طہ، (جم طہ + خ جب طہ)^م کی ایک قیمت ہے۔

یہ مسئلہ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے دفعات ۱۸۰ اور ۱۸۱ میں اِن دو صورتوں م = ن اور م = $\frac{1}{ن}$ کے لیے ثابت

کیا جا چکا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ ثبوت کی تکمیل کے لیے ہمیں اُن صورتوں پر غور کرنا ہے (۱) جبکہ م $= \frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ، یعنی جبکہ م ایک مثبت کسر ہو، (۲) جبکہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہو اور آخرالامر (۳) جبکہ م کوئی منفی حقیقی عدد ہو۔ یہ ظاہر ہے کہ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$
$= (\text{جم ف ط} + \text{خ جب ف ط})^{\frac{1}{\text{ق}}}$ اور اس کی ایک قیمت
$\text{جم} \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \text{خ جب} \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}$ ہے۔ اس لیے مسئلہ بالا درست ہے جبکہ م ایک مثبت منطق عدد ہو۔

یہ ذہن نشین رہے کہ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی قیمتیں سب کی سب جملہ

$$\text{جم} \frac{\text{ف}(\text{ط} + 2\text{س}\pi)}{\text{ق}} + \text{خ جب} \frac{\text{ف}(\text{ط} + 2\text{س}\pi)}{\text{ق}}$$

سے ملتی ہیں جس میں س = ۰، ۱، ۲، ...، ق-۱ اور $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ایک منطق کسر ہو۔

اگر م ایک منطق عدد نہیں ہے تو اس کی تعریف ہمیشہ نامحدود مختلف طریقوں سے منطق عددوں م_1، م_2، ...، $\text{م}_{\text{س}}$، ... کے ایک مستدق تواتر کی انتہا کے طور پر کی جا سکتی ہے۔ ایسے مستدق تواتر میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر صہ اختیاری طور پر انتخاب کردہ کوئی منطق عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو س ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے ایسا کہ $\text{م}_{\text{س}}$ اپنے بعد والوں $\text{م}_{\text{س}+1}$، $\text{م}_{\text{س}+2}$، ... میں سے ہر ایک سے مطلق قیمت میں اس قدر فرق رکھے جو صہ سے کم ہو۔ اگر ر کوئی مثبت حقیقی عدد ہے تو رم کی

خاص قیمت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ مستدق تواتر $ر_۱^{م}$، $ر_۲^{م}$، $ر_۳^{م}$، ... ، $ر_س^{م}$، .... کی انتہا ہے جہاں ان میں سے ہر عدد حقیقی اور مثبت ہے اور $ر_س^{م}$ اپنی خاص قیمت رکھتا ہے۔ یہ معلوم ہے[1] کہ یہ تواتر مستدق ہے اور اس کی ایک انتہا ہے جو منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر کے تابع نہیں ہے جو (تواتر) غیر منطق عدد م کی تعریف کے لیے استعمال ہوا ہے۔

اگر ی، ملتف عدد ر (جم ط + خ جب ط) کو تعبیر کرے تو $ی^{م}$ کی ایک قیمت کی تعریف جبکہ م ایک غیر منطق عدد ہو اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ تواتر $ر_۱^{م}$ $(جم ط + خ جب ط)^{م_۱}$، $ر_۲^{م}$ $(جم ط + خ جب ط)^{م_۲}$، ...، $ر_س^{م}$ $(جم ط + خ جب ط)^{م_س}$، .... کی انتہا ہے جس میں $ر_س^{م}$ اپنی خاص قیمت رکھتا ہے اور $م_س$ کی تمام قیمتوں کے جواب میں تمناظر قیمتیں $(جم ط + خ جب ط)^{م_س}$ کو دی گئی ہیں۔ اس تعریف کے جواب میں $ی^{م}$ کی ایک قیمت تواتر $ر_۱^{م}$ (جم $م_۱$ ط + خ جب $م_۱$ ط)، $ر_۲^{م}$ (جم $م_۲$ ط + خ جب $م_۲$ ط)، ...، $ر_س^{م}$ (جم $م_س$ ط + خ جب $م_س$ ط)، .... کی انتہا ہے۔ چونکہ $ر_س^{م} \leftarrow ر^{م}$

اور جم $م_س$ ط + خ جب $م_س$ ط ← جم م ط + خ جب م ط (اس امر کی وجہ سے کہ جم م ط اور جیب م ط، م کے مسلسل تفاعل ہیں) ہم دیکھتے ہیں کہ $ی^{م}$ کی ایک قیمت $ر^{م}$ (جم م ط + خ جب م ط) ہے، اور $(جم ط + خ جب ط)^{م}$ کی ایک قیمت جم م ط + خ جب م ط ہے۔

(238)

---

[1] اس کے ثبوت کے لیے دو مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable کا صفحہ ۳۴ دیکھو۔ اس کتاب کے پہلے باب میں غیر منطق عددوں کے نظریہ پر مکمل بحث کی گئی ہے۔

پس ڈیموائر کا مسئلہ ایک مثبت غیر منطق قوت نما کے لیے ثابت ہو چکا۔

$(\text{جم ط + خ جب ط})^{\text{م}}$ کی عام قیمتیں ہیں

$$\text{جم م (ط + ۲ س } \pi) + \text{خ جب م (ط + ۲ س } \pi)$$

جس میں س سے کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ م (س$_{۱}$ - س$_{۲}$)
ہرگز ایک صحیح عدد نہیں ہو سکتا جبکہ م غیر منطق ہو ہم دیکھتے ہیں کہ
$(\text{جم ط + خ جب ط})^{\text{م}}$ کی قیمتوں کا جٹ نامحدود طور پر بڑا ہے۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ $\text{ی}^{\text{م}}$ کی تعریف جس کی بموجب اس کی
قیمتیں جملہ

$$\text{ر}^{\text{م}} \{\text{جم م (ط + ۲ س } \pi) + \text{خ جب م (ط + ۲ س } \pi)\}$$

کی قیمتیں ہیں ایسی ہے کہ قوت نماؤں کے وہ قوانین جو حقیقی قوت نماؤں
پر اطلاق پذیر ہیں غیر منطق قوت نماؤں کے لیے بھی اُسی طرح درست ہیں۔

اگر م منطق یا غیر منطق منفی عدد ـ ک ہو تو

$$(\text{جم ط + خ جب ط})^{\text{م}} = \frac{1}{(\text{جم ط + خ جب ط})^{\text{ک}}}$$

اور اس کی ایک قیمت ہمیشہ

$$\frac{1}{\text{جم ک ط + خ جب ک ط}} \quad \text{یا} \quad \text{جم ک ط - خ جب ک ط}$$

ہے جو جم م ط + خ جب م ط کے مساوی ہے۔ اس طرح ڈیموائر کا مسئلہ
کسی منفی قوت نما کے لیے درست ہے۔

۱۸۷ ــــ مسئلہ

$$(\text{جم}\,\text{ط}_1 + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_1)(\text{جم}\,\text{ط}_2 + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_2)\ldots(\text{جم}\,\text{ط}_\text{ن} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_\text{ن})$$

$$= \text{جم}\,(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \ldots + \text{ط}_\text{ن}) + \text{خ}\,\text{جب}\,(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \ldots + \text{ط}_\text{ن})$$

سے. جو ڈیموائر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

$$\text{جم}\,\text{ط}_1\,\text{جم}\,\text{ط}_2\ldots\text{جم}\,\text{ط}_\text{ن}\,(1 + \text{خ}\,\text{مس}\,\text{ط}_1)(1 + \text{خ}\,\text{مس}\,\text{ط}_2)\ldots(1 + \text{خ}\,\text{مس}\,\text{ط}_\text{ن})$$

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اِس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \ldots + \text{ط}_\text{ن}) = \text{جم}\,\text{ط}_1\,\text{جم}\,\text{ط}_2\ldots\text{جم}\,\text{ط}_\text{ن}\,(1 - \text{م}_2 + \text{م}_4 - \ldots),$$

$$\text{جب}\,(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \ldots + \text{ط}_\text{ن}) = \text{جم}\,\text{ط}_1\,\text{جم}\,\text{ط}_2\ldots\text{جم}\,\text{ط}_\text{ن}\,(\text{م}_1 - \text{م}_3 + \text{م}_5 - \ldots),$$

(239) جہاں $\text{م}_\text{س}$ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن مماسوں میں سے س، س مماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔

دفعہ ۵۱ کے مسئلے (۳۹)، (۴۰)، (۴۳) مسئلہ $\text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط} = (\text{جم}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط})^\text{ن}$ سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو $(\text{جم}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط})^\text{ن} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}$ اور اس لیے نیز $(\text{جم}\,\text{ط} - \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط})^\text{ن} = \text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط} - \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}$۔ اِن سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں   جم ن ط = $\frac{۱}{۲}$(جم ط + خ جب ط)^{ن} + $\frac{۱}{۲}$(جم ط - خ جب ط)^{ن} ،

خ جب ن ط = $\frac{۱}{۲}$(جم ط + خ جب ط)^{ن} - $\frac{۱}{۲}$(جم ط - خ جب ط)^{ن}

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ ۱۵۱ میں آچکا ہے کہ

۱ + لا.جم ط + لا^{۲}.جم ۲ ط + ... + لا^{ن}.جم ن ط + ...

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ ۱ - ۲ لا جم ط + لا^{۲} ہے۔ جم ن ط کو ع$_{ن}$ سے تعبیر کرو تو ع$_{ن}$ - ۲ جم ط × ع$_{ن-۱}$ + ع$_{ن-۲}$ = ۰۔ اِس مساوات کو حل کرنے کے لیے مان لو ع$_{ن}$ = ا ک^{ن} جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو ک کے لیے ہمیں دو درجی مساوات ک^{۲} - ۲ ک جم ط + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں ک = جم ط ± خ جب ط ہیں ؛

پس   ع$_{ن}$ = ا (جم ط + خ جب ط)^{ن} + ب (جم ط - خ جب ط)^{ن}

اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو ع$_{ن}$ میں ہے۔ ن = ۱ اور ن = ۲ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ   ا = ب = $\frac{۱}{۲}$ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جم ن ط کے لیے اُوپر دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن ط کے لیے ہے۔

اجزائے ضربی

۱۸۸ــــ اب ہم لا^{ن} - (ا + خ ب) کو لا کے لحاظ سے ن خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا^{ن} (ا + خ ب)$^{\frac{۱}{ن}}$

کی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو، اگر اس جملہ کی ن قیمتیں $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$، ... ، $ق_ن$ سے تعبیر ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$لا^ن - (ا + خ ب) = (لا - ق_۱)(لا - ق_۲)\ldots(لا - ق_ن)$$

کیونکہ جب، $لا - ق_س = ۰$ تو $لا^ن - (ا + خ ب)$ معدوم ہوتا ہے اور اس لیے $لا - ق_س$ ایک جزو ضربی بغیر باقی کے ہونا چاہیئے۔ اس طرح ہمیں ن مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور ظاہر ہے کہ اِن سے زیادہ اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔ رکھو ا = رجم ط، ب = رجیب ط تو $لا^ن - (ا + خ ب)$ کے اجزائے ضربی ہو جاتے ہیں

$$\prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left[لا - غ\left(جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} + خ جب \frac{ط + ۲ س \pi}{ن}\right)\right]$$

جسمیں $غ = \sqrt[ن]{ر} = (ا^۲ + ب^۲)^{\frac{۱}{۲ن}}$

اس نتیجہ سے متعدد جملوں کے اجزائے ضربی جو ساتویں باب میں حاصل کیے جا چکے ہیں ماخوذ ہو سکتے ہیں۔ (240)

(۱) فرض کرو ا = ۱، ب = ۰ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$لا^ن - ۱ = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱}\left(لا - جم\frac{۲ س \pi}{ن} - خ جب \frac{۲ س \pi}{ن}\right)،$$

اور چونکہ $\frac{۲ س \pi}{ن} + \frac{۲(ن - س)\pi}{ن} = ۲\pi$

اس لیے اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{۱} = (\text{لا} - \text{۱}) \prod_{\text{س}=\text{۱}}^{\text{س}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})} \left(\text{لا} - \text{جم}\frac{\text{۲س}\pi}{\text{ن}} - \text{خ جب}\frac{\text{۲س}\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا} - \text{جم}\frac{\text{۲س}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\frac{\text{۲س}\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$= (\text{لا} - \text{۱}) \prod_{\text{س}=\text{۱}}^{\text{س}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})} \left(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا جم}\frac{\text{۲س}\pi}{\text{ن}} + \text{۱}\right)$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{۱} = (\text{لا} - \text{۱})(\text{لا} + \text{۱}) \prod_{\text{س}=\text{۱}}^{\text{س}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۲})} \left(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا جم}\frac{\text{۲س}\pi}{\text{ن}} + \text{۱}\right)$$

(۲) فرض کرو ا = −۱، ب = ۰ تو ہمیں ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{۱} = (\text{لا} + \text{۱}) \prod_{\text{س}=\text{۰}}^{\text{س}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۳})} \left(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا جم}\frac{(\text{۲س}+\text{۱})\pi}{\text{ن}} + \text{۱}\right)$$ جبکہ ن طاق ہو؛

اور $$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{۱} = \prod_{\text{س}=\text{۰}}^{\text{س}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۲})} \left(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا جم}\frac{(\text{۲س}+\text{۱})\pi}{\text{ن}} + \text{۱}\right)،$$ جبکہ ن جفت ہو۔

(۳) $$\text{لا}^{\text{۲ن}} - \text{۲ لا}^{\text{ن}}\text{ جم ط} + \text{۱}$$

$$= (\text{لا}^{\text{ن}} - \text{جم ط} - \text{خ جب ط})(\text{لا}^{\text{ن}} - \text{جم ط} + \text{خ جب ط})$$

$$= \prod_{\text{س}=\text{۰}}^{\text{س}=\text{ن}-\text{۱}} \left(\text{لا} - \text{جم}\frac{\text{ط}+\text{۲س}\pi}{\text{ن}} - \text{خ جب}\frac{\text{ط}+\text{۲س}\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا} - \text{جم}\frac{\text{ط}+\text{۲س}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\frac{\text{ط}+\text{۲س}\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$= \prod_{\text{س}=\text{۰}}^{\text{س}=\text{ن}-\text{۱}} \left(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا جم}\frac{\text{ط}+\text{۲س}\pi}{\text{ن}} + \text{۱}\right)$$

یا لا کی بجائے $\frac{لا}{ما}$ رکھنے اور طرفین کو $ما^ن$ سے ضرب دینے سے

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^ن ما^ن جم ط + ما^{۲ن}$$

$$= \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا^۲ - ۲ لا ما جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} + ما^۲ \right)$$

(۴) اِس آخری نتیجہ سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$لا^ن + لا^{-ن} - ۲ جم ط = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا + لا^{-۱} - ۲ جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} \right)$$

رکھو $لا = جم فہ + خ جب فہ$، تو $لا^{-۱} = جم فہ - خ جب فہ$

اور $لا^ن = جم ن فہ + خ جب ن فہ$، $لا^{-ن} = جم ن فہ - خ جب ن فہ$

اس لیے، ط کو ن ط میں بدلنے سے،

$$جم ن فہ - جم ن ط = ۲^{ن-۱} \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ جم فہ - جم \left(ط + \frac{۲ س \pi}{ن} \right) \right\}$$

(241)

دائرہ کے خواص

۱۸۹ــــ دفعہ ماسبق کے اجزائے ضربی والے ضابطوں کے ذریعہ دائرہ کے بعض مشہور خواص حاصل ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع $ا_۱ ا_۲ \ldots ا_ن$ کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ دائرے کے مستوی میں پ کوئی نقطہ ہے

اور اس کا فاصلہ دائرہ کے مرکز و سے ج ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ پ و ا_1 کو ط سے تعبیر کیا گیا ہے، تب زاویے پ و ا_2، پ و ا_3 ... علی الترتیب $\text{ط} + 2\pi/\text{ن}$، $\text{ط} + 4\pi/\text{ن}$ ... ہیں۔ اس لیے

$$\text{پ ا}_1^2 \times \text{پ ا}_2^2 \times \text{پ ا}_3^2 \ldots \text{پ ا}_{\text{ن}}^2 = \prod_{\text{س}=0}^{\text{س}=\text{ن}-1} \left\{ \text{ا}^2 - 2\,\text{اج جم}\left(\text{ط} + \frac{2\text{س}\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ج}^2 \right\}$$

پس ہمیں مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{پ ا}_1^2 \times \text{پ ا}_2^2 \times \ldots \times \text{پ ا}_{\text{ن}}^2 = \text{ا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{ا}^{\text{ن}}\text{ج}^{\text{ن}}\ \text{جم ن ط} + \text{ج}^{2\text{ن}}$$

جو دائرہ کی **ڈیموائر کی خاصیت** کے نام سے مشہور ہے۔

اُس صورت میں جبکہ پ محیط پر ہو مسئلہ بالا ہو جاتا ہے

$$\text{پ ا}_1 \times \text{پ ا}_2 \times \ldots \times \text{پ ا}_{\text{ن}} = 2\,\text{ا}^{\text{ن}}\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ن ط}$$

اُس صورت میں جبکہ پ، نصف قطر و ا_1 پر ہو ط صفر ہوتا ہے اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$\text{پ ا}_1 \times \text{پ ا}_2 \times \ldots \times \text{پ ا}_{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}} \sim \text{ج}^{\text{ن}}$$

نیز اگر پ، زاویہ $\text{ا}_{\text{ن}}\ \text{و}\ \text{ا}_1$ کے ناصف پر واقع ہو تو $\text{ط} = \frac{\pi}{\text{ن}}$

اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$\text{پ ا}_1 \times \text{پ ا}_2 \ldots \text{پ ا}_{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}} + \text{ج}^{\text{ن}}$$

یہ آخری دو صورتیں دائرہ کی کوٹ (Cote) کی خاصیتیں کہلاتی ہیں۔

مثالیں

۱۹۰ —

(۱) $\text{لا}^{\text{م}-1} \Big/ (1 + \text{لا}^{\text{ن}})$ کو جزوی کسور میں بیان کرو جہاں م ایک صحیح عدد ہے ن سے چھوٹا۔

اگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = 0$ کی ایک اصل عہ ہو تو جزو ضربی لا ـ عہ کے جواب میں جزوی کسر ہے $\dfrac{\text{عہ}^{\text{م}-1}}{\text{ن}\,\text{عہ}^{\text{ن}-1}} \times \dfrac{1}{\text{لا}-\text{عہ}}$ یا $\dfrac{1}{\text{ن}}\,\dfrac{\text{عہ}^{\text{م}-\text{ن}}}{\text{لا}-\text{عہ}}$ ، اور اس لیے عہ کی مزدوج قیمتوں کے جواب میں جو دو کسریں ہیں ان کو باہم لینے سے ہمیں کسر حاصل ہوتی ہے

$$\frac{1}{\text{ن}}\;\frac{2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م})\pi - 2\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م}+1)\pi}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\pi + 1}$$

$$\text{یا}\;\;\frac{2}{\text{ن}}\;\frac{\text{جم}\,(2\text{ر}+1)\frac{\text{م}-1}{\text{ن}}\pi - \text{لا}\,\text{جم}\,(2\text{ر}+1)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\pi + 1}\;،$$

(242)

اگر ن طاق ہو تو مزید کسر $\dfrac{(-1)^{\text{ن}-\text{م}}}{\text{ن}(\text{لا}+1)}$ حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر ن طاق ہے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{1+\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{(-1)^{\text{ن}-\text{م}}}{\text{ن}(\text{لا}+1)} + \frac{2}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-3)} \frac{\text{جم}(2\text{ر}+1)\frac{\text{م}-1}{\text{ن}}\pi - \text{لا}\,\text{جم}(2\text{ر}+1)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\pi + 1}$$

اور اگر ن جفت ہے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{1+\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{2}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \frac{\text{جم}(2\text{ر}+1)\frac{\text{م}-1}{\text{ن}}\pi - \text{لا}\,\text{جم}(2\text{ر}+1)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{2\text{ر}+1}{\text{ن}}\pi + 1}$$

(۲) $\frac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{\text{لا}^{\text{ن}}-1}$ کو جزوی کسروں میں بیان کرو اگر م، ن سے چھوٹا ہو۔

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط}}{\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{2\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}} \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{\text{لا} - \text{ا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^2}$$

کسر $\frac{\text{ن}\left(\text{لا}^{2\text{ن}-1} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جم ن ط}\right)}{\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{2\text{ن}}}$ کا نسب نما اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے اور پھر ہر جزو ضربی کے متناظر کسر مثال (۱) کے مطابق معلوم ہو سکتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ

$$(\text{ا})\quad \frac{\text{ن جب ن ط}}{\text{جب ط}} \times \frac{1}{\text{جم ن ط} - \text{جم ن فہ}} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{1}{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{فہ} + 2\text{ر}\pi \backslash \text{ن}\right)}$$

$$(\text{ب})\quad \frac{\text{ن}^2\,\text{جب ن ط جب ن فہ}}{\text{جب ط}} \times \frac{1}{\left(\text{جم ن ط} - \text{جم ن فہ}\right)^2} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{\text{جب}\left(\text{فہ} + 2\text{ر}\pi \backslash \text{ن}\right)}{\left\{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{فہ} + 2\text{ر}\pi \backslash \text{ن}\right)\right\}^2}$$

(ا) کی دائیں جانب کا جملہ، جم ط کا ایک جبری تفاعل ہے اور اس لیے مثال (۱) کے مطابق جزوی کسروں میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ مساوات (ب)، (ا) کی طرفین کو فہ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے، یا دوسرے الفاظ میں فہ کو فہ + ھ میں بدل کر مساوات کی طرفین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے۔

(۵) اگر جم ط + جم فہ + جم یہ = ۰، اور جب ط + جب فہ + جب یہ = ۰

تو ثابت کرو کہ $\text{جم}\,3\text{ط} + \text{جم}\,3\text{فہ} + \text{جم}\,3\text{یہ} - 3\,\text{جم}(\text{ط}+\text{فہ}+\text{یہ}) = 0$،

اور $\text{جب}\,3\text{ط} + \text{جب}\,3\text{فہ} + \text{جب}\,3\text{یہ} - 3\,\text{جب}(\text{ط}+\text{فہ}+\text{یہ}) = 0$

یہ اُس عام طریقہ کی ایک مثال ہے جو جبری مسئلوں میں حرفوں کی بجائے ملتف قیمتیں رکھ کر مثلثی مسئلوں کو اخذ کرنیکا ہے۔ اگر ا + ب + ج = ۰ تو ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} − ۳ ا ب ج = ۰ ؛ فرض کرو ا = جم ط + خ جب ط، ب = جم فہ + خ جب فہ، ج = جم پہ + خ جب پہ تو گویا ہمیں یہ دیا گیا ہے کہ اگر

(جم ط + جم فہ + جم پہ) + خ (جب ط + جب فہ + جب پہ) = ۰ ،

تو (جم ۳ ط + جم ۳ فہ + جم ۳ پہ) + خ (جب ۳ ط + جب ۳ فہ + جب ۳ پہ)

− ۳ {جم (ط + فہ + پہ) + خ جب (ط + فہ + پہ)} = ۰

اب دونوں مساواتوں میں حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ صفر کے مساوی رکھنے سے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

تیرھویں باب پر مثالیں

(243)

۱۔ ثابت کرو کہ ((۱ + جب فہ + خ جم فہ) / (۱ + جب فہ − خ جم فہ))^{ن} = جم ($\frac{1}{2}$ ن π − ن فہ) + خ جب ($\frac{1}{2}$ ن π − ن فہ)

۲۔ {جم ط − جم فہ + خ (جب ط − جب فہ)}^{ن} + {جم ط − جم فہ − خ (جب ط − جب فہ)}^{ن}

کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ ((۱ + لا)^{ن} − (لا − ۱)^{ن}) / ۲ لا

= ۲ (لا^{2} + مس^{2} π/ن) (لا^{2} + مس^{2} ۲π/ن) .... (لا^{2} + مس^{2} ر π/ن)

جہاں $ر = \frac{۱}{۲}(ن-۱)$ یا $\frac{۱}{۲}ن - ۱$ اور م مساوی ہے ۱ یا ن کے بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔

۴ - ثابت کرو کہ

$$۴ \text{ جب } \tfrac{۱}{۲}(ب-ج) \text{ جب } \tfrac{۱}{۲}(ج-ع) \text{ جب } \tfrac{۱}{۲}(ع-ب) \sum \text{جب}(ف ع + ق ب + ر ج)$$

$$= \text{جب}\left\{(ن+۱)ع - \tfrac{۱}{۲}(ب+ج)\right\} \text{ جب } \tfrac{۱}{۲}(ب-ج) + \cdots$$

جہاں $\sum$ اُس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو ف، ق، ر کی تمام ایسی صحیح عددی قیمتوں (بشمول صفر) کے لیے لیا گیا ہے کہ $ف + ق + ر = ن$

۵ - اگر پ ایک مثبت صحیح عدد ہو اور مساوات $لا^{پ} = ۱$ کی اصلیں ع، ب، ج، ... ہوں اور ن، ایک سے بڑی کوئی عددی مقدار ہو تو ثابت کرو کہ $ع^{\frac{۱}{ن}} + ب^{\frac{۱}{ن}} + ج^{\frac{۱}{ن}} + \cdots$ کی حقیقی قیمت صرف مس $\frac{\pi}{ن}$ \ مس $\frac{\pi}{پ ن}$ ہے۔

۶ - اگر $(۱ + لا)^{ن} = ف_{۰} + ف_{۱} لا + ف_{۲} لا^{۲} + \cdots$

تو ثابت کرو کہ $ف_{۰} - ف_{۲} + ف_{۴} - \cdots = ۲^{\frac{۱}{۲}ن} \text{ جم } \tfrac{۱}{۴} ن \pi$،

$$ف_{۱} - ف_{۳} + ف_{۵} - \cdots = ۲^{\frac{۱}{۲}ن} \text{ جب } \tfrac{۱}{۴} ن \pi$$

۷ - اگر $لا_{۱}$، $لا_{۲}$، ...، $لا_{ن}$ وہ متناظر اصلیں ہوں جو مساوات $لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} \text{ جم } ن ط + ۱ = ۰$ کی اصلوں کے مزدوج جوڑوں سے منتخب کی گئی ہیں اور اگر

$$ف(ع) = \sum_{ر=۱}^{ر=ن} لا_{ر} \text{ جم}\left(ع + \frac{ر\pi}{ن}\right)$$

تو ثابت کرو کہ

$$ف(ع_{۱})\, ف(ع_{۲}) \ldots ف(ع_{پ}) = \left(\tfrac{۱}{۲}ن\right)^{پ-۱} \left[ف\left\{\tfrac{۱}{پ}(ع_{۱} + ع_{۲} + \cdots + ع_{پ})\right\}\right]^{پ}$$

۸ ۔ اگر عہ، بہ، جہ، ضہ، صہ کوئی پانچ زاویے ہوں ایسے کہ ان کی جیوب التمام کا مجموعہ اور نیز ان کی جیوب کا مجموعہ صفر ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جم}\,۴\,\text{عہ} = \tfrac{۱}{۲}\left(\sum \text{جم}\,۲\,\text{عہ}\right)^{۲} - \tfrac{۱}{۲}\left(\sum \text{جب}\,۲\,\text{عہ}\right)^{۲} ،$$

$$\sum \text{جب}\,۴\,\text{عہ} = \sum \text{جب}\,۲\,\text{عہ} \sum \text{جم}\,۲\,\text{عہ}$$

۹ ۔ اگر ن مقداروں مس لا، مس ۲ لا، مس $\frac{۲}{۲}$ لا، ...، مس $۲^{\text{ن}-۱}$ لا میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، ...، ن ن، کے حاصل ضربوں کے مجموعے $\text{م}_{۱}$، $\text{م}_{۲}$، $\text{م}_{۳}$، ... $\text{م}_{\text{ن}}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱ - \text{م}_{۲} + \text{م}_{۴} - \text{م}_{۶} + \ldots = ۲^{\text{ن}}\,\text{جب لا}.\text{جم}\,(۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{لا قم}\,۲^{\text{ن}}\,\text{لا} ،$$

$$\text{م}_{۱} - \text{م}_{۳} + \text{م}_{۵} - \ldots = ۲^{\text{ن}}\,\text{جب لا}\,\text{جب}(۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{لا قم}\,۲^{\text{ن}}\,\text{لا}$$

۱۰ ۔ اگر جم (بہ - جہ) + جم (جہ - عہ) + جم (عہ - بہ) = $-\frac{۳}{۲}$ تو ثابت کرو کہ (244)

جم ن عہ + جم ن بہ + جم ن جہ

صفر کے مساوی ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ن، ۳ کا ضعف ہو، اور اگر ن، ۳ کا ضعف ہے تو وہ ۳ جم $\frac{۱}{۳}$ ن (عہ + بہ + جہ) کے مساوی ہے۔

۱۱ ۔ ثابت کرو کہ لا کی وہ قیمتیں جو مساوات

$$۱ - \text{ن لا} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}\text{لا}^{۳} + \ldots$$

$$+ (-۱)^{\frac{۱}{۲}\text{ن}(\text{ن}+۱)}\,\text{لا}^{\text{ن}} = ۰$$

کو پورا کرتی ہیں یہ ہیں $لا = مس \frac{(4ر+1)\pi}{4ن}$ جس میں ر کوئی صحیح عدد ہے۔

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\sum_{ر=1}^{ر=ن} (-1)^{ر-1} \frac{جب^2 رعہ \; جم^{2ن-3} رعہ}{لا^2 + مس^2 رعہ} = \frac{(2ن+1) لا}{(1+لا)^{2ن+1} - (1-لا)^{2ن+1}}$$

جس میں $عہ = \frac{\pi}{2ن+1}$

۱۳ - اگر $ض_{س,ر}$ سے اُن حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہو جو مقداروں

$$مس^2 \pi \backslash (2ن+1)، مس^2 2\pi \backslash (2ن+1)، \ldots، مس^2 ن\pi \backslash (2ن+1)$$

میں سے س، س مقداروں کو لینے سے بنتے ہیں جبکہ مقدار $مس^2 ر\pi \backslash (2ن+1)$ کو خارج کر دیا جائے اور اگر

$$اِ_ر = (-1)^{ر-1} جب^2 ر\pi \backslash (2ن+1) \times جم^{2ن-3} ر\pi \backslash (2ن+1)$$

تو ثابت کرو کہ $\sum اِ_ر \times ض_{س,ر} = 0$ جہاں حاصل جمع ر کی ایک سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے لیا گیا ہے اور س کی قیمت ایک سے ن تک کوئی بھی ہے۔

۱۴ - ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ میں بنایا گیا ہے اور دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں تک وتر کھینچے گئے ہیں۔ اگر یہ وتر $و_1$، $و_2$، ....، $و_ن$ سے تعبیر ہوں (جس میں ابتدا اُس وتر سے کی گئی ہے جو قریب ترین راس تک کھینچا گیا ہے اور باقی دوسرے ترتیب وار لئے گئے ہیں) تو ثابت کرو کہ مقدار

$و_۱ و_۲ + و_۲ و_۳ + \ldots + و_{ن-۱} و_ن + و_ن و_۱$ اُس نقطہ کے محل پر منحصر نہیں ہے جس سے وتر کھینچے گئے ہیں۔

۱۵۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے راس جو ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے $ا_۱$، $ا_۲$، ...، $ا_{۲ن+۱}$ ہیں اور $ا_۱$ اور $ا_{۲ن+۱}$ کے درمیان محیط پر کوئی نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ طولوں $و ا_۱$، $و ا_۳$، ...، $و ا_{۲ن+۱}$ کا مجموعہ طولوں $و ا_۲$، $و ا_۴$، ...، $و ا_{۲ن}$ کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۱۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے مستوی میں پ کوئی نقطہ ہے اور اس نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں کے فاصلے $غ_۱$، $غ_۲$، ...، $غ_ن$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{۱}^{ن} \frac{۱}{غ^۲} = \frac{ن}{ر^۲ - ا^۲} \times \frac{ر^{۲ن} - ا^{۲ن}}{ر^{۲ن} - ۲ ر^ن ا^ن \text{ جم } ن ط + ا^{۲ن}}$$

جہاں دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور و سے پ کا فاصلہ ر ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو وپ، اُس نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے جو کثیر الاضلاع کے کسی راس تک کھینچا گیا ہے۔

۱۷۔ خطوط مستقیم جن کے طول علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ... ن کے متناسب ہیں ایک مستقیم الاضلاع شکل بناتے ہیں جس کے خارجی زاویوں میں سے ہر ایک $\frac{۲\pi}{ن}$ کے مساوی ہے۔ اگر پہلے اور آخری خطوں کے سروں کو ملانے سے ایک کثیر الاضلاع بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ہے

$$\frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۲۴} \text{ جم } \frac{\pi}{ن} + \frac{۱۶}{ن} \text{ جم } \frac{\pi}{ن} \text{ قم}^۲ \frac{\pi}{ن}$$

۱۸۔ منتظم کثیر الاضلاع $ا_۱ ا_۲ \ldots ا_{۲م}$ کے ضلعوں کی تعداد ۲م ہے۔ اس کے

حائط دائرہ کے مرکز سے $\text{ا}_1\text{ا}_2$، $\text{ا}_2\text{ا}_3$، ... ، $\text{ا}_\text{م}\text{ا}_1$ پر عمود کھینچے گئے ہیں۔

ثابت کرو کہ اِن عمودوں کا حاصلِ ضرب $\left(\tfrac{1}{2}\text{ا}\right)^{\text{م}-1}\overline{\text{ا م}}$ ہے۔

۱۹- اگر $\text{ا}_1\text{ا}_2\ldots\text{ا}_{2\text{ن}}$، $\text{ب}_1\text{ب}_2\ldots\text{ب}_{2\text{ن}}$ دو ہم مرکز اور متشابہاً واقع منتظم کثیر الاضلاع ہوں جن کے ضلعوں کی تعداد ۲ن ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{پ ا}_1\times\text{پ ا}_3\times\ldots\times\text{پ ا}_{2\text{ن}-1}}{\text{پ ا}_2\times\text{پ ا}_4\times\ldots\times\text{پ ا}_{2\text{ن}}}=\frac{\text{پ ب}_1\times\text{پ ب}_3\times\ldots\times\text{پ ب}_{2\text{ن}-1}}{\text{پ ب}_2\times\text{پ ب}_4\times\ldots\times\text{پ ب}_{2\text{ن}}}$$

جہاں اُس ہم مرکز دائرہ پر پ کوئی نقطہ ہے جس کا نصف قطر کثیر الاضلاعوں کے حائط دائروں کے نصف قطروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۲۰ - نصف قطر ا کے ایک دائرہ کے اندر مرکز سے فاصلہ ب پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے اور نقطے پ_1، پ_2، ... ، $\text{پ}_\text{ن}$ محیط پر لیے گئے ہیں ایسے کہ $\text{پ}_1\text{پ}_2$، $\text{پ}_2\text{پ}_3$، ... ، $\text{پ}_\text{ن}\text{پ}_1$ کے محاذی مرکز و پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{وپ}_1+\text{وپ}_2+\ldots+\text{وپ}_\text{ن}$$

$$=(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\left((\text{وپ}_1)^{-1}+(\text{وپ}_2)^{-1}+\ldots+(\text{وپ}_\text{ن})^{-1}\right)$$

۲۱ - ثابت کرو کہ اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

$$\text{جم ن ط}=1+2\text{ن جب}\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{ط}+\pi}{2}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\underline{|2}}\,2^2\,\text{جب}^2\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{2(\text{ط}+\pi)}{2}$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\underline{|3}}\,2^3\,\text{جب}^3\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{3(\text{ط}+\pi)}{2}+\ldots$$

۲۲ - ثابت کرو کہ ن ضلعوں والے الگ منتظم کثیر الاضلاع جو

نصف قطر ر کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں کھینچے جا سکتے ہیں اِن کی تعداد م، صحیح عددوں کی اُس تعداد کا نصف ہے جو ن سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

نیز یہ دِکھاؤ کہ اِن کے ضِلعوں کا حاصلِ ضرب $ر^{م} \sqrt{ن} \sqrt{ن-۲م}$ کے مساوی ہے اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت ہو اور $ر^{م}$ کے مساوی ہے اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت نہو۔

(246)

چودھواں باب

لاتناہی سلسلوں کا نظریہ

۱۹۱ ـــــــ ہم اس باب میں چند مسئلے بیان کرینگے جو لاتناہی سلسلوں کے استدقاق سے متعلق ہیں جبکہ اِن کی ارقام حقیقی یا ملتف اعداد ہوں یا متغیرات ۔ ایسے سلسلوں کے نظریہ کی مکمل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے، اس لیے ہم اپنی توجہ صرف اُن چیزوں تک محدود رکھینگے جو مثلثی سلسلوں کی نوعیت اور ان کی خاصیتوں پر بحث کرنے کے لیے بالکل ضروری ہیں ۔

حقیقی سلسلوں کا استدقاق

۱۹۲ ـــــــ فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا کوئی تواتر ا_1، ا_2، ...، $\text{ا}_{\text{ن}}$، ... ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے اور فرض کرو

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}$$

اگر $\text{س}_{\text{ن}}$ کی ایک مُعین محدود انتہا س ہے جبکہ ن کو نامحدود طور پر بڑھایا جاتا ہے تو لاتناہی سلسلے $\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \dots + \text{ا}_{\text{ن}} + \dots$ کو مستدق کہا جاتا ہے اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف اس کا مجموعہ کہتے ہیں ۔

ہم اس باب میں $س_ن$ کی انتہا کو (جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے) ظاہر کرنے کے لیے ترقیم نہا $س_ن$ استعمال کرینگے جب کبھی یہ انتہا موجود ہو۔

وہ شرط کہ نہا $س_ن$ = س یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد صہ کے تناظر، خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو، ن کی ایک قیمت $ن_{صہ}$ متعین ہو سکے ایسی کہ س − $س_ن$ کی مطلق قیمت صہ سے کم رہے ن کی ہر قیمت کے لیے جو $ن_{صہ}$ سے بڑی یا اس کے مساوی ہو۔

جب سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \dots + ا_ن + \dots$، س کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ $ا_{ن+۱} + ا_{ن+۲} + \dots$ مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س − $س_ن$ ہے جس کو $ب_ن$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ عدد $ب_ن$ کو مستدق سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \dots + ا_ن + \dots$ کا ن رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں۔ باقی $ب_۱$، $ب_۲$، ...، $ب_ن$، ... عددوں کا ایک تواتر بناتے ہیں ایسا کہ نہا $ب_ن = ۰$، یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلے کا استدقاق مان لینے کے بعد ہی باقی $ب_ن$ کا کوئی مفہوم ہو سکتا ہے۔ (247)

عدد $ا_{ن+۱} + ا_{ن+۲} + \dots + ا_{ن+م}$ کو $ب_{ن،م}$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور عددوں $ب_{ن،۱}$، $ب_{ن،۲}$، $ب_{ن،۳}$، ... کو ہم ن رقموں کے بعد والے جزوی باقی کہینگے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ جزوی باقی $ب_{ن،م}$، ن اور م کی تمام قیمتوں کے لیے متعین عددوں کے طور پر موجود ہوتے ہیں خواہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہو یا نہ ہو۔

کسی مستدق سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \dots + ا_ن + \dots$ کا انتہائی مجموعہ اکثر $\sum_{۱}^{\infty} ا$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۱۹۳ ـــــ سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \ldots + ا_ن + \ldots$ ایسا ہو سکتا ہے کہ اعداد $س_ن$ کی کوئی مُتعین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے ۔ حسب ذیل صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں :-

(۱) یہ ہو سکتا ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد ک کے تناظر خواہ وہ کتنا ہی بڑا ہو ن کی ایک قیمت $ن_ی$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد $س_{ن_ی}$، $س_{ن_ی+۱}$، ...، $س_{ن_ی+م}$، ....

سب کے سب ہم علامت ہوں اور سب کے سب عدد ک سے بڑے ہوں ۔ اس صورت میں $س_ن$، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے خواہ مثبت سمت میں یا منفی سمت میں ؛ اس صورت میں سلسلہ کو متسع کہتے ہیں ۔ اس اِتساع کے واقعہ کو بعض اوقات $نہا\ س_ن = \infty$، یا $نہا\ س_ن = -\infty$ سے تعبیر کرتے ہیں بموجب اس کے کہ $س_ن$ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں ۔

(۲) اگر $س_ن$ مطلق قیمت میں ن کے ساتھ غیر معین طور پر حسب سابق بڑھے مگر $ن_ی$ خواہ کتنا ہی بڑا کیوں نہ لیا جائے $س_{ن_ی}$، $س_{ن_ی+۱}$، ...، $س_{ن_ی+م}$، ... میں مثبت اور منفی دونوں رقمیں ہوں تو یہ کہہ سکتے ہیں کہ سلسلہ عدم تعین کے غیر متعین حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے ۔ تاہم اس کو ایسی صورت میں بالعموم متسع کہتے ہیں اور اِتساع کے اِس واقعہ کو $نہا\ س_ن = \pm\infty$ سے تعبیر کرتے ہیں ۔

(۳) یہ ہو سکتا ہے کہ گو $س_ن$ کی کوئی معین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے مگر ن کی بڑھتی ہوئی قیمتوں کے ایک تواتر (فرض کرو $ن_۱$، $ن_۲$، $ن_۳$، ....، $ن_ر$، ....) کا انتخاب کرنا ممکن ہو ایسا کہ $س_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہو بشرطیکہ ن صرف وہ قیمتیں اختیار کرے جو اس تواتر میں ہیں۔

اس صورت میں سلسلہ کو اہتزازی سلسلہ کہتے ہیں، لیکن بعض اوقات اہتزازی سلسلے متسع کہلاتے ہیں۔ وہ اہتزازی سلسلہ جس میں $س_ن$، ن کی ہر قیمت کے لیے عدد اُ کسی مستقل مثبت عدد سے کم ہو عدم تعین کے محدود حدود کے درمیان اہتزاز کرنیوالا سلسلہ کہلاتا ہے۔

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر کسی سلسلہ کی رقمیں سب کی سب ایک ہی علامت کی ہوں تو سلسلہ صورت (۱) کے مطابق متسع ہے ورنہ مستدق۔ (243)

سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ن + \ldots$

اور $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{ن} + \ldots$

دونوں متسع ہیں کیونکہ ہر صورت میں $س_ن$، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے اور مستقل علامت رکھتا ہے۔

سلسلہ $۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - \ldots$ عدم تعین کے غیر معین حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ کیونکہ $س_ن = -\frac{۱}{۲}ن$ جبکہ ن جفت ہو اور $س_ن = \frac{۱}{۲}(ن + ۱)$ جبکہ ن طاق ہو، اس طرح جیسے ن بڑھتا ہے $س_ن$ عددی قیمت میں بڑھتا ہے اور نہا $س_ن = \pm\infty$

سلسلہ $۱ + ۱ - ۲ + ۱ + ۱ - ۲ + ۱ + ۱ - ۲ + \ldots$ عدم تعین کے

محدود حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ $س_ن$ ۱، ۲ یا صفر قیمت اختیار کرتا ہے بموجب اس کے کہ ن کی شکل ۳ ر + ۱، ۳ ر + ۲، یا ۳ ر ہو۔

سلسلہ جب عہ + جب ۲ عہ + ... + جب ن عہ + ...

جہاں عہ کی کوئی مستقل قیمت ہے جو نہ صفر ہے اور نہ ۲π کا ضعف ہے عدم تعین کے محدود انتہاؤں کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ اس صورت میں

$$س_ن = جب \frac{(ن+1)عہ}{2} جب \frac{ن عہ}{2} قم \frac{عہ}{2} = \frac{1}{2}\left\{جم \frac{عہ}{2} - جم (ن + \frac{1}{2}) عہ\right\} قم \frac{عہ}{2}$$

پس یہ ظاہر ہے کہ $س_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق نہیں ہوتا کیونکہ جم (ن + ½) عہ کی کوئی معین انتہا نہیں ہے جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ لیکن $س_ن$، ن کی ہر قیمت کے لیے ½ (۱ + جم $\frac{عہ}{2}$) قم $\frac{عہ}{2}$ سے عدداً کم یا اس کے مساوی ہے۔

۱۹۳[1] ـــــ سلسلہ $ا_1 + ا_2 + ا_3 + ... + ا_ن + ...$ کے استدقاق کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں خواہ عا کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک قیمت $ن_{عا}$ متعین ہو سکے ایسی $ن_{عا}$ رقموں کے بعد جزوی باقی سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں۔

یہ دکھانے کے لئے کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ سلسلہ مستدق ہے اور اس طرح س کا وجود ہے۔ تب ن کی ایک قیمت $ن_{عا}$ متعین ہو سکتی ہے ایسی کہ

$س - س_{ن_{عا}}$، $س - س_{ن_{عا}+1}$، $س - س_{ن_{عا}+2}$، ...، $س - س_{ن_{عا}+م}$ ...

سب کے سب مطلق قیمت میں $\frac{1}{2}$ عا سے کم ہیں۔ اِس سے اِس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ نہا $س_ن$ = س جبکہ عا کی اختیاری قیمتیں حساب میں لیگئی ہوں۔

اب $ل_{ن_{عا}+1} + ل_{ن_{عا}+2} + \ldots + ل_{ن_{عا}+م} = (س - س_{ن_{عا}}) - (س - س_{ن_{عا}+م})$

اور پھر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ $س - س_{ن_{عا}}$، $س - س_{ن_{عا}+م}$ دونوں عدداً $\frac{1}{2}$ عا سے کم ہیں اس لیے $ل_{ن_{عا}+1} + ل_{ن_{عا}+2} + \ldots + ل_{ن_{عا}+م}$ عدداً عا سے کم ہے؛

اور یہ م کی سب قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لیے درست ہے۔

پھر یہ دِکھانے کے لیے کہ اوپر کی شرط کافی ہے ہم ایک اصول کی طرف رجوع کرتے ہیں جو استدقاق کے عام اصول کے طور پر مشہور ہے۔ اِس اصول کے مطابق عددوں کے ایک تواتر $س_1$، $س_2$، ...، $س_ن$، ... کی ایک معین انتہا ہوگی بشرطیکہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں ن کی ایک قیمت $ن_{عا}$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد

(249)

$س_{ن_{عا}+1} - س_{ن_{عا}}$، $س_{ن_{عا}+2} - س_{ن_{عا}}$، ...، $س_{ن_{عا}+م} - س_{ن_{عا}}$، ...

سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں۔ پس شرط کے کافی ہونے کے لیے ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے کہ آیا $س_{ن_{عا}+م} - س_{ن_{عا}}$، جزوی باقی $ب_{ن_{عا}, م}$ یا $ل_{ن_{عا}+1} + ل_{ن_{عا}+2} + \ldots + ل_{ن_{عا}+م}$ کے مساوی ہے۔

اگر م = ∞ لیا جائے تو شرط میں یہ بات شامل ہے کہ ن کی

کافی بڑی قیمت لینے سے $ا_{ن+۱}$ اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں؛
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ کے استدقاق کی ضروری شرط یہ ہے کہ
نہا $ا_ن = ۰$ ۔ لیکن یہ شرط بطور خود کافی نہیں ہے ۔

مستدق سلسلہ کے استدقاق کی تیزی ن کی اُس کم سے کم
قیمت سے ناپی جا سکتی ہے جو صہ کی ایک دی ہوئی قیمت کے
تناظر ایسی ہو کہ سب $ب_{ن،م}$ کے سب جزوی باقی مطلق
قیمت میں صہ سے کم ہوں؛ یعنی رقموں کی اُس تعداد سے جن کا
لینا ضروری ہے تا کہ جزوی باقی سب کے سب کسی مقررہ عدد سے
کم ہوں ۔

ہندسی سلسلہ ۱ + لا + لا^۲ + ۰۰۰ کی صورت میں جو قیمت $\frac{۱}{۱-لا}$
کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ لا عدداً ایک سے کم ہو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ا_{ن+۱} + \cdots + ا_{ن+م} = \frac{لا^ن(۱-لا^م)}{۱-لا}$$

اور لا کو مثبت فرض کرنے سے یہ صہ سے کم ہو گا م کی تمام قیمتوں کے لیے اگر $\frac{لا^ن}{۱-لا}$
$<$ صہ ؛ اس صورت میں ن کی مناسب قیمت وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{لوگ\ صہ + لوگ\ (۱-لا)}{لوگ\ لا}$
سے عین بڑا ہے ۔ ن کی قیمت بڑھتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے، اور اس سبب
اس سلسلہ کے استدقاق کی تیزی گھٹتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے؛ لا جب ایک
پر پہنچتا ہے تو ن غیر معین طور پر بڑھتا ہے؛ اس طرح سلسلہ کا استدقاق
غیر معین طور پر سست ہو جاتا ہے ۔ اگر لا = ۱ تو سلسلہ صریحاً متسع ہے ۔

۱۹۴ ـــــ اب ہم مستدق سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \cdots + ا_ن + \cdots$ کی
اُس صورت پر غور کریں گے جس میں مثبت رقمیں غیر معین تعداد میں ہیں اور
نیز منفی رقمیں غیر معین تعداد میں ۔ فرض کرو کہ $|ا_ن|$ سے $ا_ن$ کی عددی قیمت

تعبیر کیگئی ہے، اِس طرح | لن | ، لن کے مساوی ہے یا - لن کے بموجب اس کے کہ لن مثبت ہے یا منفی - اب سلسلہ

| ل۱ | + | ل۲ | + | ل۳ | + ... + | لن | + ...

پر غور کرو -

اگر یہ آخری سلسلہ متدق ہے تو اصلی سلسلہ کو مطلقاً متدق کہتے ہیں لیکن اگر سلسلہ ∑ | لن | تسع ہے تو سلسلہ ∑ لن کو نیم متدق یا مشروطاً متدق یا اتفاقاً متدق کہتے ہیں۔ (2.50)

سلسلہ ۱⁻² - ۲⁻² + ۳⁻² + ... مطلقاً متدق ہے کیونکہ سلسلہ ۱⁻² + ۲⁻² + ... متدق ہے؛ لیکن سلسلہ ۱⁻¹ - ۲⁻¹ + ۳⁻¹ - ..... صرف مشروطاً متدق ہے کیونکہ سلسلہ ۱⁻¹ + ۲⁻¹ + ۳⁻¹ + ... تسع ہے۔

سلسلہ ل۱ - ل۲ + ل۳ - .... جس میں ارقام باری باری سے مثبت منفی ہیں ہمیشہ متدق (مطلقاً یا مشروطاً) ہوگا اگر ہر رقم عدداً رقم مابعد سے بڑی ہو اور نیز نہا لن = ۰ کیونکہ

(-۱)ⁿ بن،م = (لن+۱ - لن+۲) + (لن+۳ - لن+۴) + ...

= لن+۱ - (لن+۲ - لن+۳) - ....

اور اس لیے (-۱)ⁿ بن،م مثبت ہے اور لن+۱ سے کم ہے یا اس کے مساوی - پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن منتخب ہوسکتا ہے اتنا بڑا کہ | بن،م | < صہ م کی تمام قیمتوں کے لیے خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو - اس لئے سلسلہ متدق ہے۔

۱۹۵ ——— مشروطاً متدق سلسلے میں رقموں کی ترتیب کو بدلا جائے

تو بالعموم مجموعہ بدل جائیگا۔ فرض کرو کہ پہلی ف مثبت رقموں کا مجموعہ $س_{ف}$ ہے اور پہلی ق منفی رقموں کا مجموعہ جن کی علامتیں بدل دی گئی ہیں $سَ_{ق}$ ہے تب اگر سلسلہ کو دوبارہ مرتب کیا جائے اِس طور پر کہ مثبت رقموں کا تواتر نہ بدلے اور نیز منفی رقموں کا تواتر نہ بدلے اور سلسلہ کی پہلی ف + ق رقموں میں سے ف رقمیں مثبت ہوں اور ق رقمیں منفی تو اس طور پر ترتیب یافتہ سلسلہ کا مجموعہ $س_{ف} - سَ_{ق}$ کی انتہا ہے جبکہ ف اور ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اب چونکہ تواتر $س_{ف}$، $سَ_{ق}$ میں سے ہر ایک مثبت رقموں پر مشتمل ہے اس لیے $س_{ف}$ کی اور $سَ_{ق}$ کی انتہائیں دونوں محدود اور معین ہیں یا ورنہ لاتمناہی۔ بموجب فرض دونوں محدود اور معین نہیں ہیں کیونکہ دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستدق نہیں ہے، اس لیے $س_{ف}$، $سَ_{ق}$ کی انتہاؤں میں سے کم از کم ایک لاتمناہی ہے؛ اگر دونوں انتہائیں لاتمناہی ہیں تو نہا $(س_{ف} - سَ_{ق})$ کی قیمت، ف اور ق کی قیمتوں کے دو تواتروں پر منحصر ہوگی۔ اگر $س_{ف}$، $سَ_{ق}$ کی انتہاؤں میں سے صرف ایک لاتمناہی ہے تو نہا $(س_{ف} - سَ_{ق})$ لاتمناہی ہے اور اس لیے اصلی سلسلہ مستدق نہیں تھا۔ اگر سلسلہ کی اصلی ترتیب $ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳} - ا_{۴} + \dots$ میں علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہوں تو ف اور ق نسبتِ تساوی میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، لیکن اگر بالفرض ہم سلسلہ کو ترتیب $ا_{۱} + ا_{۳} - ا_{۲} + ا_{۵} + ا_{۷} - ا_{۴} + \dots$ میں لکھیں تو ف اور ق نسبت ۲ : ۱ میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، اور $س_{۲ق} - سَ_{ق}$

اور $س_{ق} - س_{ق}$ کی انتہائیں جبکہ ق کو غیر معیّن طور پر بڑھا دیا جائے بالعموم مساوی نہیں ہوتیں مثلاً نیم مستدق سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots$ پر غور کرو۔ اس کے مجموعہ کو س سے تعبیر کیا جائے تو

$$س_{۲ن} = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots - \frac{۱}{۲ن}$$

$$= \sum_{۱}^{ن} \left(\frac{۱}{۴ن - ۳} - \frac{۱}{۴ن - ۱} - \frac{۱}{۴ن - ۲} - \frac{۱}{۴ن} \right) \quad (251)$$

فرض کرو کہ سلسلہ س میں رقموں کی ترتیب کو بدلا گیا ہے اور اس طرح سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۴} + \ldots$ حاصل کیا گیا ہے۔ اِس کے مجموعہ کو $\bar{س}$ سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\bar{س}_{۳ن} = \sum_{۱}^{ن} \left(\frac{۱}{۴ن - ۳} + \frac{۱}{۴ن - ۱} - \frac{۱}{۲ن} \right)$$

پس

$$\bar{س}_{۳ن} - س_{۴ن} = \sum_{۱}^{ن} \left(\frac{۱}{۴ن - ۲} - \frac{۱}{۴ن} \right)$$

$$= \frac{۱}{۲} \sum_{۱}^{ن} \left(\frac{۱}{۲ن - ۱} - \frac{۱}{۲ن} \right) = \frac{۱}{۲} س_{ن}$$

اس لیے جب 'ن' لا انتہا بڑا ہو تو $\bar{س} = \frac{۳}{۲} س$۔ یہ مثال ڈرشلی (Dirichlet.) نے دی تھی جس نے سب سے اول یہ بتایا کہ نیم مستدق سلسلہ کا مجموعہ رقموں کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

۱۹۶ ——— ریمن (Riemann) نے ثابت کیا ہے کہ نیم مستدق سلسلہ کی رقموں کو ایسی ترتیب میں مکرر مرتب کیا جا سکتا ہے کہ اِس نئے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ کوئی دی ہوئی قیمت ع اختیار کر سکے۔

فرض کرو کہ ع مثبت ہے؛ اول ف مثبت رقمیں لو جہاں ف ایسا ہے کہ $س_{ف-۱} < ع$ اور $س_{ف} > ع$؛ پھر ق منفی رقمیں لو

جہاں ق ایسا منتخب کیا جائے کہ $س_ق - س_{ق-1} >$ عہ اور $س_ق - س_ق <$ عہ؛

ثانیاً ف مثبت رقمیں لو ایسی کہ $س_{ق+ف-1} - س_ق <$ عہ اور $س_{ق+ف} - س_ق >$ عہ؛

پھر ق منفی رقمیں لو ایسی کہ $س_{ق+ف} - س_{ق+ق} <$ عہ اور $س_{ق+ف} - س_{ق+ق-1} >$ عہ

اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اس طریقہ پر عمل جاری رکھنے سے ہمیں ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے ایسا کہ اس کا مجموعہ، عہ سے اس قدر فرق رکھتا ہے جو اِس سلسلہ کی آخری رقم سے کم ہے، پس اگر ہم اِس سلسلہ کی رقموں کی تعداد کو لا انتہا بڑا کر دیں تو اس کا مجموعہ عہ کی طرف مستدق ہوگا ۔

یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ رقموں کو ایسی مکرر ترتیب میں رکھا جا سکتا ہے کہ نیا سلسلہ متسع ہو یا یہ کہ وہ اہتزاز کرے ۔

ملتف سلسلوں کا استدقاق

۱۹۷ ـــــ فرض کرو کہ ملتف عددوں کا ایک تواتر $ی_۱$، $ی_۲$، ...، $ی_ن$، ... ہے جس میں $ی_ن$، $لا_ن + خ\ ما_ن$ کو تعبیر کرتا ہے جہاں $لا_ن$ اور $ما_ن$ حقیقی عدد ہیں ۔ فرض کرو

$$س_ن = ی_۱ + ی_۲ + \dots + ی_ن،$$

$$س_ن = لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \dots + لا_ن،$$

$$سَ_ن = ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + \dots + ما_ن$$

اِس طرح $س_ن = س_ن + خ\ سَ_ن$

اگر س کی ایک معین انتہا جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے س ہو جو خود ایک ملتف یا حقیقی عدد ہے تو لامتناہی سلسلہ

ی + ی۲ + ی۳ + ۰۰۰۰ + یٖن + ۰۰۰۰

کو مستدق کہتے ہیں اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف مجموعہ۔

وہ شرط کہ س = نہا سٖن یہ ہے کہ |س - سٖن| صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اس طرح اگر

س - سٖن = غٖن (جم طٖن + خ جب طٖن)

تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے نہا غٖن = ۰۔ اگر س = س + خ سَ جہاں س اور سَ حقیقی ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے س - سٖن = غٖن جم طٖن، سَ - سَٖن = غٖن جب طٖن، تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نہا غٖن = ۰ تو نہا (س - سٖن) = ۰، نہا (سَ - سَٖن) = ۰، یعنی سٖن، سَٖن علی الترتیب س اور سَ کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ ی۱ + ی۲ + ی۳ + ۰۰۰ + یٖن + ۰۰۰ کے مستدق ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو سلسلے لا۱ + لا۲ + لا۳ + ۰۰۰۰، اور ما۱ + ما۲ + ما۳ + ۰۰۰۰ دونوں مستدق ہونے چاہئیں۔ اِس کے برعکس اگر یہ آخری دو سلسلے مستدق ہیں تو ملتف عددوں کا سلسلہ بھی مستدق ہے، کیونکہ

(252)

|(س + خ ر سَ) - (سن + خ ر سَن)| ≤ |س - سن| + |سَ - سَن|

اب اگر نہا سن = س، نہا سَن = سَ تو ہم ن کی ایک قیمت ن صہ منتخب کر سکتے ہیں اتنی بڑی کہ

|س - سن| < ½ صہ، |سَ - سَن| < ½ صہ، بشرطیکہ ن ≥ ن صہ - پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

|(س + خ ر سَ) - (سن + خ ر سَن)| ≤ صہ اگر ن ≥ ن صہ؛ اور چونکہ صہ اختیاری ہے

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا (سن + خ ر سَن) = س + خ ر سَ، اور اس طرح ملتف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں ∑ لا، ∑ ما میں سے کسی کی انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ اہتزاز کرے تو سلسلہ ∑ ی مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ ین = رن (جم طن + خ ر جب طن)۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ سلسلہ ∑ ی مستدق ہوگا اگر سلسلہ ∑ ر جس میں ہر رقم رن متناظر رقم ین کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ ∑ رن (جم طن + خ ر جب طن) مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں ∑ رن جم طن، ∑ رن جب طن میں سے ہر ایک مستدق ہو۔ اب اعداد رن جم طن، رن جب طن میں سے ہر ایک عددوں ± رن کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں ∑ ر جم ط، ∑ ر جب ط میں سے ہر ایک کے لیے عدد سن+م - سن، سلسلہ ∑ ر کے متناظر جزوی باقی سے عددًا کم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ ∑ ر مستدق ہے تو سلسلوں ∑ ر جم ط، ∑ ر جب ط میں سے ہر ایک مستدق ہے، اور اس لیے سلسلہ ∑ ین مستدق ہے۔

اس کا عکس ضروری نہیں کہ درست ہو، چنانچہ سلسلہ

ح ن (جم طن + خر جب طن)

مستدق ہوسکتا ہے اور معہذا سلسلہ ح ن متسع ۔

اگر سلسلہ ح ن جو مقیاسوں کے مجموعہ سے بنا ہے مستدق ہو تو سلسلہ

ح ن (جم طن + خر جب طن)

کو **مطلقاً مستدق** کہتے ہیں ۔

مثلاً وہ سلسلہ جس کی عام رقم ت^۲(جم ن ط + خر جب ن ط) ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ ح ت^۲ مستدق ہے؛ لیکن وہ مستدق سلسلہ جس کی عام رقم ت^۱(جم ن ط + خر جب ن ط) ہے (جہاں ۲ π > ط > ۰) مطلقاً مستدق نہیں ہے کیونکہ سلسلہ ح ت^۱ متسع ہے ۔

(253)

مسلسل تفاعل

۱۹۸ ـــــــ فرض کرو کہ ملتف عدد ی = لا + خر ما کا ایک تفاعل ف(ی) ہے جس کی ایک واحد محدود قیمت ہے ی کی ہر قیمت کے لئے جو کسی دیے ہوئے حدود کے درمیان واقع ہے ۔ تب اِس تفاعل کی ایک واحد قیمت ہوگی اُس شکل کے ہر نقطہ کے لیے جو ایک خاص رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے ۔ یہ رقبہ، ی کو تعبیر کرنیوالے مستوی کا کوئی محدود حصہ ہوسکتا ہے یا اس مستوی کا پورا حصہ ۔

کوئی تفاعل نقطہ ی = ی, پر **مسلسل** کہلاتا ہے اگر ایک ثبت عدد ع ہمیشہ معلوم کیا جاسکے ایسا کہ ف(ی) ـ ف(ی,) کا

مقیاس σ کسی مقررہ مثبت عدد صہ سے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو کم ہوئی کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے ی ۔ ی، کا مقیاس عا سے کم ہے۔ صہ کی ہر قیمت کے لیے عا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہیے۔

کوئی تفاعل جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر ہر نقطہ پر اِس شرط کو پورا کرے اِس رقبہ کے اندر مسلسل کہلاتا ہے۔ رقبہ کا احاطہ ممکن ہے شامل ہو یا ممکن ہے شامل نہ ہو۔

یکساں استدقاق

۱۹۹ ——— فرض کرو کہ ی یا لا + خر ما کا ایک تفاعل ف (ی) ہے جو کسی رقبہ میں مسلسل ہے۔ تب اگر

سلسلہ $\quad$ ف$_{1}$ (ی) + ف$_{2}$ (ی) + ف$_{3}$ (ی) + ... + ف$_{ن}$ (ی) + ...

مستدق ہو تو ہم اس کے انتہائی مجموعہ کو فا (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں ۔ فرض کرو کہ مجموعہ

ف$_{1}$ (ی) + ف$_{2}$ (ی) + ... + ف$_{ن}$ (ی)

جہاں ن کوئی مستقل عدد ہے س$_{ن}$ (ی) کے مساوی ہے ، تب

ف$_{ن+1}$ (ی) + ف$_{ن+2}$ (ی) + ... کے انتہائی مجموعہ کو ن رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں اور اس کو ب$_{ن}$ (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

فا (ی) = س$_{ن}$ (ی) + ب$_{ن}$ (ی)

اب فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے مثبت عدد صہ کے جواب میں خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک قیمت، ی پر غیر منحصر، معلوم کی جا سکتی ہے ایسی کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں ب م کا مقیاس صہ سے کم ہے جہاں م ≥ ن تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے ی کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جو اُس رقبہ میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔ صحیح عدد ن قیمت میں صہ پر منحصر ہو گا۔

لیکن اگر ی رقبہ کے اندر کسی ثابت قیمت ی۱ کے لا انتہا قریب آئے اور تمام باقیوں ب م (ی) کے مقیاس کو صہ سے کم کرنے کے لیے ن کو غیر معین طور پر بڑھتا ہوا فرض کرنا ضروری ہو تو نقطہ ی۱ کے قرب میں سلسلہ یکساں طور پر مستدق نہیں ہوتا اور ہم کہتے ہیں کہ وہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ (254)

نقطہ ی۱ کو جس کے لیے صہ منتخب ہو سکے ایسا کہ صورت مذکورۂ بالا واقع ہو وہ نقطہ کہتے ہیں جس کے قرب میں استدقاق غیر یکساں ہے یا بعض اوقات اس کو صرف غیر یکساں استدقاق کا نقطہ کہتے ہیں اگر سلسلہ خود اس نقطہ پر مستدق ہو۔ ایسے نقطہ کا احاطہ کرنے والے کسی رقبہ کے لیے یہ ناممکن ہے کہ ن کی کوئی مستقل قیمت مقرر کی جا سکے ایسی کہ اس رقبہ کے اندر ی کی تمام قیمتوں کے لیے ب م کے مقیاس کافی طور پر چھوٹی مثبت مقدار صہ سے کم ہوں؛ اور اِس لیے یہ سلسلہ یکساں طور پر اِس کل رقبہ میں مستدق نہیں ہوتا۔ اگر ی = ی۱ تو سلسلہ یا مستدق ہو سکتا ہے یا قسح۔

ہم اِس امر کو یوں بیان کر سکتے ہیں:-
فرض کرو کہ جیسے ی کسی ثابت قیمت ی۱ کے نزدیک آتا ہے

ایک ثبت عدد صہ مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ ف۱ (ی) + ف۲ (ی)
+ ف۳ (ی) + ... کی رقموں کی وہ تعداد ن (جن کا لینا ضروری ہے تاکہ
|ب م (ی)| < صہ جہاں م ≥ ن) ی - ی۱ کے مقیاس پر منحصر ہو
اس طور پر کہ ن مسلسل بڑھتا ہے جیسے مق |(ی - ی۱)| گھٹتا ہے اور لا انتہا
بڑا ہو جاتا ہے جبکہ مق (ی - ی۱) لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے تو ہم کہتے
ہیں کہ سلسلہ ی۱ کے قرب میں غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

ایسے کسی نقطہ کے قرب میں سلسلہ کے استدقاق کی شرح لا انتہا
تیزی سے متغیر ہوتی ہے اور جب مق |ی - ی۱| کو لا انتہا گھٹایا جاتا ہے
تو سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کوئی مستدق عددی سلسلہ لا انتہا
سست رفتار سے مستدق نہیں ہو سکتا؛ مثلاً جب، ی = ی۱ تو سلسلہ
ف۱ (ی۱) + ف۲ (ی۱) + ... کا استدقاق، اگر سلسلہ مستدق
ہے تو، لا انتہا سست نہیں ہے؛ صرف اس صورت میں جبکہ
ی متغیر ہو اس طور پر کہ مق |(ی - ی۱)| لا انتہا گھٹے سلسلہ

ف۱ (ی) + ف۲ (ی) + ...

لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ پس یہ کہنے کی بجائے
کہ کوئی سلسلہ ایک نقطہ پر غیر یکساں طور پر مستدق ہے
یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ سلسلہ اس نقطہ کے قریب غیر یکساں طور پر مستدق ہے۔ رقموں
کی وہ تعداد ن جن کا لینا ضروری ہے تاکہ باقی ب م (ی) کے مقیاس
کافی طور پر چھوٹے عدد صہ سے کم ہو سکیں بڑھتی ہے جیسے ی قیمت ی۱ کے
نزدیک آتا ہے اور لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے جب مق |ی - ی۱| مسلسل

گھٹتا جاتا ہے، اور پھر اگر سلسلہ نقطہ ی پر مستدق ہے تو قیموں کی یہ تعداد اچانک ایک محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ پس یہ عدد ن خود ایسے نقطہ کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

(255) اگر کسی رقبہ ا میں اس کے ہر نقطہ پر ہمیں حاصل ہو

$$|\text{ف}_1(\text{ی})| \leq \text{ا}_1،\ |\text{ف}_2(\text{ی})| \leq \text{ا}_2،\ \ldots،\ |\text{ف}_\text{ن}(\text{ی})| \leq \text{ا}_\text{ن} \ldots$$

جہاں $\text{ا}_1، \text{ا}_2، \ldots، \text{ا}_\text{ن}، \ldots$ مستقل مثبت عدد ہیں ایسے کہ سلسلہ $\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \ldots \text{ا}_\text{ن} + \ldots$ مستدق ہے تو سلسلہ

$$\text{ف}_1(\text{ی}) + \text{ف}_2(\text{ی}) + \ldots$$

رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ اس مسئلہ سے یکساں استدقاق کی ایک جانچ ملتی ہے جو خاص خاص صورتوں پر استعمال کرنے میں بڑے کام آتی ہے؛ اس کو ویرسٹراس کی جانچ[1] کہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $\text{ا}_{\text{ن}+1} + \text{ا}_{\text{ن}+2} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}+\text{م}}$ م کی ہر قیمت کے لیے صہ سے کم ہو جہاں $\text{ن} \geq \text{ن}_\text{صہ}$۔ نیز ی کی ہر قیمت کے لیے

$$|\text{ف}_{\text{ن}+1}(\text{ی}) + \text{ف}_{\text{ن}+2}(\text{ی}) + \ldots + \text{ف}_{\text{ن}+\text{م}}(\text{ی})|$$

کا مقیاس، $\text{ا}_{\text{ن}+1} + \text{ا}_{\text{ن}+2} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}+\text{م}}$ سے بڑا نہیں ہے اور اس لیے صہ سے کم ہے۔ چونکہ م کی ہر قیمت کے لیے یہ درست ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ ملتف سلسلہ مستدق ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے $|\text{ب}_\text{ن}(\text{ی})| < \text{صہ}$،

[1] Weierstrass's test

بشرطیکہ ن ⩾ نِ صہ - اس لیے سلسلہ رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے -

نوٹ :- بعض مصنفین سلسلہ کو ایک دیے ہوئے رقبہ میں یکساں مستدق اُس وقت کہتے ہیں جبکہ ایک عدد ن معلوم ہوسکے ایسا کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے باقی بن کا مقیاس صہ سے کم ہو - لیکن ہماری تعریف جو اس کتاب میں دی گئی ہے اِس تعریف سے زیادہ سخت ہے ؛ ایسے سلسلوں کا بنانا ممکن ہے جو ہماری تعریف کی بموجب یکساں طور پر مستدق نہ ہوتے ہوں لیکن اُس تعریف کی بموجب ہوں جو دیگر مصنفین بیان کرتے ہیں -

۲۰۰ ــــــ اگر تفاعلات ف (ی)، ف (ی)، ... مسلسل ہوں ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے رقبہ ا میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں تو تفاعل فا (ی) جو مستدق سلسلہ ∑ ف (ی) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل تفاعل ہے ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو اِس رقبہ ا میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں بشرطیکہ سلسلہ ∑ ف (ی) پورے رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہو -

کیونکہ ہمیں حاصل ہوتا ہے فا (ی) = سن + بن جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے ایسا کہ ی کی زیر بحث تمام قیمتوں کے لیے بن کا مقیاس صہ سے کم ہے - فرض کرو کہ ی میں مف ی کا اضافہ کر دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اِس اضافہ کے تمناظر فا (ی)، سن، اور بن میں اضافے علی الترتیب مف فا (ی)، مف سن، مف بن ہیں - تب چونکہ بموجب فرض بن اور بن + مف بن کے مقیاس دونوں صہ سے کم ہیں اس لیے مف بن کا مقیاس ۲ صہ سے کم ہے -

نیز چونکہ سن، ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے اس لیے اگر مف ی کا
مقیاس کافی چھوٹا ہو تو مف سن کا مقیاس صہ سے کم ہوگا؛ پس
اگر حق مف ی ایک خاص قیمت سے کم ہو تو مف سن + مف بن کا
یا مف فا (ی) کا مقیاس ۳ صہ سے کم ہے کیونکہ مف سن + مف بن (256)
کا مقیاس مف سن اور مف بن کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑا
نہیں ہے۔ اب ۳ صہ کو ہم اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا چاہیں، اس لیے
مف ی کو کافی چھوٹا لینے سے حق مف فا (ی) کو اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا
ہے جتنا ہم چاہیں؛ اِس کے وہی معنے ہیں کہ تفاعل فا (ی) مسلسل ہے۔
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس ثبوت کے لیے یکساں استدقاق کی وہ کم
سخت تعریف کافی ہے جو دفعہ ۱۹۹ کے نوٹ میں دی گئی ہے۔

۲۰۱ ——— اگر ی کی قیمت یا کے لیے اس کے قرب میں سلسلہ کا
استدقاق غیر یکساں ہو تو یہ ضروری نہیں ہے کہ سلسلہ کا مجموعہ مسلسل ہو؛
اس صورت میں دفعہ ماسبق کا استدلال ناکام رہتا ہے۔ تفاعل فن (ی)
کی انتہائی قیمت جبکہ ی = یا، فن (یا) ہے لیکن اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ
جیسے ی، یا کی طرف مستدق ہوتا ہے مجـ∞ {فن (ی) - فن (یا)} صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔
ہم مجموعہ مجـ∞ {فن (ی) - فن (یا)} کو فا (ن، ی - یا) سے
تعبیر کر سکتے ہیں جو ن اور ی - یا کا تفاعل ہے۔ اب جبکہ ی کو پہلے
یا کے مساوی بنایا جاتا ہے اور پھر ن کو لاتناہی بنایا جاتا ہے تو
فا (لا، ی - یا) کی انتہائی قیمت صفر ہے، لیکن اگر ن کو پہلے لاتناہی
بنایا جائے اور بعد میں ی - یا کو صفر تو فا (ن، ی - یا) کی انتہائی قیمت کا

صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

اِس واقعہ کی تمثیل کے لیے اسٹوکس (Stokes) حقیقی سلسلہ

$$\frac{\text{۱ + ۵ لا}}{\text{۲(۱ + لا)}} + \cdots + \frac{\text{لا (لا+۲) ن}^{\text{۲}} \text{ + لا (۴ - لا) ن + ۱ - لا}}{\text{ن (ن+۱) \{(ن-۱) لا + ۱\} (ن لا + ۱)}} + \cdots$$

پر غور کرتا ہے۔ اگر لا = ۰ تو یہ سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱×۲}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{\text{ن (ن + ۱)}} + \cdots$$

اب سلسلہ بالا کی عام رقم ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{ن (ن + ۱)}} + \frac{\text{۲ لا}}{\text{\{(ن-۱) لا + ۱\} (ن لا + ۱)}}$$

یا $$\left\{\frac{\text{۱}}{\text{ن}} + \frac{\text{۲}}{\text{(ن-۱) لا + ۱}}\right\} - \left\{\frac{\text{۱}}{\text{ن + ۱}} + \frac{\text{۲}}{\text{ن لا + ۱}}\right\}$$

اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ۳ ہے خواہ لا کوئی قیمت سوائے صفر کے اختیار کرے۔

سلسلہ $\frac{\text{۱}}{\text{۱×۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲×۳}} + \cdots$ کا مجموعہ ایک ہے اور اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ، لا کی قیمت صفر کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

ن رقموں کے بعد باقی $\frac{\text{۱}}{\text{ن + ۱}} + \frac{\text{۲}}{\text{ن لا + ۱}}$ ہے؛ اِس کو صہ کے مساوی رکھنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ن} = \frac{\text{\{لا + ۲ - صہ (لا + ۱)\}} + \sqrt{\text{\{صہ (لا + ۱) - (لا + ۲)\}}^{\text{۲}} \text{ - ۴ صہ لا (صہ - ۳)}}}{\text{۲ صہ لا}}$$

جو لا انتہا بڑھتا ہے جیسے لا، لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ لا انتہا سُست رفتار سے مستدق ہوتا ہے جبکہ لا، لا انتہا چھوٹا ہو۔ سلسلہ کے مجموعہ میں عدم تسلسل کی یہی وجہ ہے۔

سلسلوں کے یکساں اور غیر یکساں استدقاق کے درمیان امتیاز کا انکشاف بالعموم سیڈیل (Siedel)

سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اپنا مضمون "Note über eine Eigenschaft" بیویرین اکاڈیمی کے " Transactions " بابتہ ۱۸۴۸ء میں شایع کیا تھا؛ لیکن یہ نظریہ اس سے قبل اسٹوکس نے ایک مقالہ[1] "On the Critical Values of the sums" میں شایع کیا تھا جس کو اُس نے کیمبرج فلاسیفکل سوسائٹی کے روبرو ۶ دسمبر ۱۸۴۷ء کو پڑھا تھا۔ اگرچہ اِس نظریہ کو سیڈیل نے اسٹوکس کی بہ نسبت بعض باتوں میں زیادہ مکمل طور پر بیان کیا ہے تاہم اسٹوکس کو اس امر میں سبقت حاصل ہے کہ اُس نے اُن تفاعلوں کے عدم تسلسل کی اصلی وجہ دریافت کی جو لاتناہی سلسلوں سے تعبیر ہوتے ہیں[2]۔ اس مضمون میں حال میں جو ترقی ہوئی ہے اُس میں یکساں اور غیر یکساں استدقاق کے درمیانی امتیاز کو بہت اہمیت حاصل ہے۔

سیڈیل نے اِس امر کو حسب ذیل مسئلہ میں مختصر کر دیا ہے :- اگر ایک مستدق سلسلہ دیا جائے جس کی واحد ارقام متغیری کے مسلسل تفاعل ہیں اور جو ی کے ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے تو ایک نقطہ کے عین قرب میں جہاں تفاعل غیر مسلسل ہے ی کی قیمتیں مقرر کی جا سکتی ہیں ایسی کہ اِن کے لیے سلسلہ اِتنی سست رفتار سے مستدق ہو جتنی ہم چاہیں۔

سلسلہ ہندسیہ

۲۰۲ ــــــ سلسلہ ہندسیہ $۱ + ی + ی^۲ + \ldots + ی^{ن-۱}$ پر غور کرو جہاں $ی = لا + خ ما = ر\,(جم\,ط + خ\,جب\,ط)$ ۔ اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{۱ - ی^ن}{۱ - ی} \quad یا \quad \frac{۱ - ر^ن\,(جم\,ن\,ط + خ\,جب\,ن\,ط)}{۱ - ر\,(جم\,ط + خ\,جب\,ط)}$$

رکھو $\quad ۱ - ر\,جم\,ط = غہ\,جم\,فہ \,،\, ر\,جب\,ط = غہ\,جب\,فہ$

---

[1] دیکھو Stoke's "Collected Works" Vol.I.

[2] اس انکشاف کی تاریخ کے لیے دیکھو Reiff s "Geschichte . . . ."

تو $غہ = + \sqrt{ا - ۲ ر جم ط + ر^۲}$

پس مجموعہ ہو جاتا ہے

$\frac{ا}{غہ}(جم فہ + خ ر جب فہ) - \frac{ر^ن}{غہ}\{جم (ن ط + فہ) + خ ر جب (ن ط + فہ)\}$ ؛

اور ن کو جب لا انتہا بڑا کر دیا جاتا ہے تو اس مجموعہ کی دوسری رقم کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے اگر ر > ا ؛ لیکن اگر ر > ا تو یہ لا متناہی ہو جاتا ہے
پس یہ لا متناہی سلسلہ

$ا + ی + ی^۲ + \ldots + ی^{ن-ا} + \ldots$

مستدق ہوتا ہے اگر ی کا مقیاس ایک سے کم ہو اور تب اس کا مجموعہ ہے

$\frac{ا}{غہ}(جم فہ + خ ر جب فہ) = \frac{ا - ر جم ط + خ ر جب ط}{ا - ۲ ر جم ط + ر^۲}$

اگر ی کا مقیاس ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متسع ہوگا ؛ اور اگر مق ی ایک ہو تو بھی سلسلہ مستدق نہیں ہوگا کیونکہ دو سلسلوں کے جم ن ط اور کے جب ن ط کے مجموعے جو دفعہ ۴۷ میں معلوم کیے جا چکے ہیں ایک معین انتہا پر نہیں پہنچتے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کر دیا جاتا ہے۔

(258)

سلسلہ اور اس کے مجموعہ کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\frac{ا - ر جم ط}{ا - ۲ ر جم ط + ر^۲} = ا + ر جم ط + ر^۲ جم ۲ ط + \ldots + ر^ن جم ن ط + \ldots$ ،

$\frac{ر جب ط}{ا - ۲ ر جم ط + ر^۲} = ر جب ط + ر^۲ جب ۲ ط + \ldots + ر^ن جب ن ط + \ldots$ ؛

یہ سلسلے ر کی تمام قیمتوں کے لیے جو ±ا کے درمیان واقع ہوں درست ہیں سوائے ر = ا اور ر = - ا کے جن کے لیے یہ سلسلے مستدق نہیں ہیں۔
اس کا مشاہدہ کرنے کے لیے ابتدائی سلسلہ میں صرف ی کی بجائے - ی

رکھنے کی ضرورت ہے۔

سلسلہ ہندسیہ، ی کی تمام قیمتوں کے لیے یکساں طور پر مستدق ہے اگر ی کا مقیاس $\leqslant$ ۱-ضہ سے، جہاں ضہ کوئی مستقل ثبت عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ کیونکہ پہلی ن رقموں کے بعد باقی $\frac{ی^ن}{۱-ی}$ ہے اور اس کا مقیاس $\frac{(۱-ضہ)^ن}{ضہ}$ سے کم ہے؛ تب سلسلہ ایسا ہوگا کہ ی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس $\leqslant$ ۱-ضہ سے

$$|ب_ن(ی)| \leqslant صہ$$

اگر $\frac{(۱-ضہ)^ن}{ضہ} < صہ$، یا اگر ن $> \frac{لوک\ ضہ + لوک\ صہ}{لوک\ (۱-ضہ)}$

پس چونکہ ن کا منتخب کرنا ممکن ہے اس طرح کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے (جن کے مقیاس $\leqslant$ ۱-ضہ سے) ن رقموں کے بعد والے باقی صہ سے کم ہوں اور چونکہ ن کی اس سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے یہ درست ہے اس لیے ایسی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ سلسلہ ہندسیہ کسی ایسے دائرہ سے محدود رقبہ میں یکساں طور پر مستدق ہے جو اکائی نصف قطر والے (مرکز مبداء پر) دائرہ کے اندر واقع ہو اور اس کا ہم مرکز ہو۔

صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے

۲۰۳—— اب ہم اِس عام قوتی سلسلہ

$$ا_. + ا_۱ی + ا_۲ی^۲ + \cdots + ا_نی^ن + \cdots$$

پر غور کرینگے جہاں ا٫ ا٫ ا٫ .... مختلف عدد ہیں جو مختلف متغیری پر منحصر نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ ی کا مقیاس ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ا٫ ا٫ ا٫ .... کے مقیاس عب٫ عہ٫ عہ٫ .... سے مقیاسوں کا سلسلہ ہے

عب + عہ ر + عہ ر² + ... + عن رن + ...

(256)

اگر یہ سلسلہ مستدق ہو تو ی کا مندرجہ بالا سلسلہ مطلقاً مستدق ہوگا۔ اگر مقیاسوں کا سلسلہ ر کی کسی قیمت کے لیے مستدق ہوتا ہو تو ر کی اس سے چھوٹی قیمتوں کے لیے وہ مستدق ہوگا؛ اور اگر وہ ر کی کسی قیمت کے لیے متسع ہو تو ر کی اس سے بڑی قیمتوں کے لیے بھی وہ متسع ہوگا۔ سلسلہ عب + عہ ر + عہ ر² + ... سے متعلق تین صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:—

(۱) یہ سلسلہ٫ صفر سے مختلف ر کی بعض قیمتوں کے لیے مستدق ہو سکتا ہے اور باقی دوسری قیمتوں کے لیے متسع؛ تب ایک مثبت عدد غہ موجود ہوتا ہے ایسا کہ یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ ر < غہ اور متسع ہوتا ہے جبکہ ر > غہ۔ جب٫ ر = غہ تو سلسلہ مستدق ہو سکتا ہے یا متسع۔

(۲) یہ سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہو سکتا ہے؛ اس امر کو غہ = ∞ سے ظاہر کرنا سہولت بخش ہے۔

(۳) یہ سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ر = ۰ کے متسع ہو سکتا ہے؛ اس کو غہ = ۰ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

کسی دی ہوئی صورت میں عدد غہ معلوم کرنے کے لیے ہم عن^(۱/ن) کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ عن^(۱/ن) ایک معین انتہا ا کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے؛ ایسی صورت میں اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو عن^(۱/ن)٫ ن کی تمام قیمتوں کے لیے (مع ایسی قیمتوں کی ایک محدود تعداد کے

اِستثنا کے) ا + صہ اور ا - صہ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ زیادہ
عام صورت میں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ثبت عدد ا موجود ہو ایسا کہ ن کی
تمام قیمتوں کے لیے (سوائے ایک محدود جٹ کے) عن^(۱/ن)، ا + صہ سے
کم ہو اور نیز ایسا ہو کہ ن کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے ا + صہ اور
ا - صہ کے درمیان واقع رہو۔ ہر صورت میں عدد غہ = ۱/ا ۔ اِس کو
دیکھنے کے لیے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے اگر ر < ۱/ا
اور متسع ہوتا ہے اگر ر > ۱/ا ۔ کیونکہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے
ایک محدود جُبٹ کے عن ر^ن < (ا + صہ)^ن ر^ن جہاں صہ اختیاری ہے؛
اگر ر < ۱/ا تو ہم صہ کو منتخب کر سکتے ہیں ایسا کہ (ا + صہ) ر < ۱۔ تب
سلسلہ کی تمام رقمیں (سوائے اِن کے ایک محدود جٹ کے) اُس سلسلہ
ہندسیہ کی تناظر رقموں سے کم ہونگی جس کی نسبت مشترک (ا + صہ) ر ایک سے
کم ہے؛ اس لیے سلسلہ مستدق ہے۔ اگر ر > ۱/ا تو صہ منتخب ہو سکتا ہے
ایسا کہ (ا - صہ) ر > ۱، اور اس طرح ن کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے
عن ر^ن > (ا - صہ)^ن ر^ن > ۱؛ اس لیے سلسلہ متسع ہے۔

اگر عن^(۱/ن) کی انتہا صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے
تو ر کی ہر قیمت کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ کیونکہ اس صورت میں
عن ر^ن < صہ^ن ر^ن جہاں صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صہ ر < ۱، اور (260)
یہ ن کی ہر قیمت کے لئے (سوائے ایسی قیمتوں کے ایک محدود جٹ کے)
درست ہے۔ پس سلسلہ کی ہر رقم سوائے اِن کی ایک محدود تعداد کے
ایک مستدق سلسلہ ہندسیہ کی تناظر رقم سے کم ہے اور اس لیے سلسلہ مستدق

ہے۔ اس صورت میں غہ = ∞ ۔

اگر $ع_ن^{\frac{1}{ن}}$ غیر معین طور پر بڑی قیمتیں رکھے یعنی اگر کوئی ایسا عدد موجود نہ ہو جو تمام عددوں $ع_ن^{\frac{1}{ن}}$ سے بڑا ہو تو سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے الاّ ر = ۰، متسع ہوتا ہے۔ اس صورت میں غہ = ۰ ۔ کیونکہ اگر ر کو کوئی قیمت سوائے صفر کے دی جائے تو سلسلہ کی اُن رقموں کی تعداد لا انتہا ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک اکائی سے بڑی ہے اور اس لیے سلسلہ متسع ہے۔

۲۰۴ ــــــ دفعہ ماسبق میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ایک عدد غہ موجود ہوتا ہے (جو ممکن ہے صفر ہو یا غیر واجب قیمت ∞ اختیار کرے) ایسا کہ سلسلہ $ع_۰ + ع_۱ ر + ع_۲ ر^۲ + \ldots$ مستدق ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غہ سے چھوٹی ہو، اور متسع ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غہ سے بڑی ہو۔

نقطہ ی = ۰ کو مرکز مانکر اس کے گرد نصف قطر غہ کا ایک دائرہ کھینچو۔ اِس دائرہ کو سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots$

کے **استدقاق کا دائرہ** کہتے ہیں اور اس کے نصف قطر کو سلسلہ کے **استدقاق کا نصف قطر** کہتے ہیں۔

استدقاق کا نصف قطر محدود ہو سکتا ہے یا صفر یا لامتناہی۔

یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots$ کسی نقطہ ی کیلئے جو استدقاق کے دائرہ کے اندر واقع ہو مطلقاً مستدق ہوتا ہے، اور کسی نقطہ ی کے لیے جو اس دائرہ کے باہر واقع ہو متسع ہوتا ہے۔ لیکن کسی ایسے

نقطہ کے لیے جو استدقاق کے دائرہ کے محیط پر واقع ہو سلسلہ کے استدقاق سے متعلق کوئی ٹھیک عام بیان نہیں دیا جا سکتا۔

اب یہ امر کہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اگر مق ی < غہ اس واقعہ سے منتج ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ اور یہ امر کہ سلسلہ متسع ہے اگر مق ی کی قیمت ر > غہ اس واقعہ سے منتج ہوتا ہے کہ استدقاق کی ضروری شرط نہا $|$اُن یؔن$|$ = ۰ پوری نہیں ہوتی۔ کیونکہ

$|$اُن یؔن$|$ = (ر/غہ)^{ن} عن غہ^{ن}، اور ن کی قیمتوں کی لاتمناہی تعداد کے لیے

عن غہ^{ن} > (۱ − غہ صہ)^{ن}؛ اس لئے اگر صہ منتخب کیا جائے ایسا کہ

ر (۱/غہ − صہ) > ۱

تو ہم دیکھتے ہیں کہ $|$اُن یؔن$|$ > ۱، ن کی قیمتوں کی لاتمناہی تعداد کے لئے۔

(261)

۲۰۵ ——— اب یہ دکھایا جائیگا کہ سلسلہ اُ + اُ ی + اُ ی^{۲} + ... کسی دائرہ میں جس کا نصف قطر استدقاق کے نصف قطر سے کم ہو اور جس کا مرکز ی = ۰ ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر غہ ـ ک ہے اور فرض کرو کہ غہ$_{۱}$ ایک ثابت عدد ہے غہ اور غہ ـ ک کے درمیان۔ فرض کرو غہ ـ ک = غہ$_{۱}$ ـ صہ۔

باقی اُ$_{ن}$ یؔن + اُ$_{ن+۱}$ ی$^{ن+۱}$ + ... کے انتہائی مجموعہ کا مقیاس سلسلہ

عن رؔن + عن$_{+۱}$ ر$^{ن+۱}$ + ...

یا

عن غہ$_{۱}^{ن}$ (ر/غہ$_{۱}$)^{ن} + عن$_{+۱}$ غہ$_{۱}^{ن+۱}$ (ر/غہ$_{۱}$)$^{ن+۱}$ + ...

کے انتہائی مجموعہ سے متجاوز نہیں ہوتا۔ لیکن اعداد $\text{ع}_{\text{ن}}\,\text{غہ}_1^{\text{ن}}$، $\text{ع}_{\text{ن}+1}\,\text{غہ}_1^{\text{ن}+1}$، ... سب کے سب کسی ثابت عدد ک سے کم ہیں کیونکہ سلسلہ مستدق ہے جبکہ $\text{ر} = \text{غہ}$؛ اس لیے سلسلہ کا مجموعہ $\text{ک}\left\{\left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}+1} + \dots\right\}$ سے یا $\text{ک}\left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}}\left(1 - \frac{\text{ر}}{\text{غہ}_1}\right)^{-1}$ سے کم ہے، اور یہ $\text{ک}\left(1 - \frac{\text{ھ}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}}\frac{\text{غہ}_1}{\text{ھ}}$ سے کم ہے۔ اگر صہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ایک مثبت عدد ہو تو ن کی ایک قیمت ن_1 متعین ہو سکتی ہے ایسی کہ $\text{ن} \geqslant \text{ن}_1$ کے لیے $\text{ک}\left(1 - \frac{\text{ھ}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}}\frac{\text{غہ}_1}{\text{ھ}} < \text{صہ}$۔ اس لیے سلسلہ $\text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{ی} + \text{ا}_2\text{ی}^2 + \dots$ کے باقی $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{ی})$ کا مقیاس صہ سے کم ہے $\text{ن} \geqslant \text{ن}_1$ کے لیے اور ی کی تمام قیمتوں کے لیے ایسی کہ $\text{مق ی} \leqslant \text{غہ} - \text{ک}$؛ اس لیے سلسلہ کا استدقاق نصف قطر غہ ـ ک کے دائرہ میں یکساں ہے[1] یہ درست ہے خواہ کتنا ہی چھوٹا عدد ک (> 0) لیا جائے، لیکن یہ دعوی کرنا غیر صحیح ہوگا کہ استدقاق کے دائرہ میں استدقاق بالضرور یکساں ہوتا ہے[2]

سلسلہ $\text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{ی} + \text{ا}_2\text{ی}^2 + \dots$ کے مجموعہ کو ی کی اُن قیمتوں کے لیے جن کے مقیاس استدقاق کے نصف قطر سے کم ہیں فا (ی) سے تعبیر کریں تو دفعہ ۲۰۰ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا (ی)، استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ تمام نقطوں کے لیے ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر استدقاق کا نصف قطر لامتناہی ہو تو مستوی کے تمام محدود نقطوں کے لیے فا (ی) مسلسل ہوتا ہے۔

سلسلوں $۱ + ی + ی^۲ + ی^۳ + \ldots$

اور $۱ + \frac{ی}{۱} + \frac{ی^۲}{۲} + \frac{ی^۳}{۳} + \ldots$

کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ ان کے مجموعوں کے تفاعل فا(ی) اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ی کے مسلسل تفاعل ہیں۔

سلسلہ $۱ + \frac{ی}{\lfloor ۱} + \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \frac{ی^۳}{\lfloor ۳} + \ldots + \frac{ی^ن}{\lfloor ن} + \ldots$

کے استدقاق کا نصف قطر لاتناہی ہے، مجموعہ کا تفاعل فا(ی)، ی کی تمام محدود قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

سلسلہ $۱ + \lfloor ۱\, ی + \lfloor ۲\, ی^۲ + \ldots + \lfloor ن\, ی^ن + \ldots$

کے استدقاق کا نصف قطر صفر ہے۔

(262) ۲۰۶ — استدقاق کے دائرہ کے محیط پر سلسلہ کا استدقاق ابتک زیر بحث نہیں آیا ہے۔ مسئلہ کے عام ہونے پر اثر نہیں پڑیگا اگر ہم استدقاق کے نصف قطر کو ایک فرض کرلیں۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots$ جبکہ تمام سر حقیقی ہوں استدقاق کے دائرہ پر سب نقطوں کے لیے مستدق ہوتا ہے سوائے نقطہ ی = ۱ کے اگر سر سب کے سب مثبت ہوں اور سوائے نقطہ ی = -۱ کے اگر سر باری باری سے مثبت اور منفی ہوں بشرطیکہ ہر دو صورتوں میں سر $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ ... مطلق مقدار کے لحاظ سے نزولی ترتیب میں ہوں اور بشرطیکہ $ا_ن$ کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے صفر ہو۔

فرض کرو کہ $س_ن = ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots + ا_{ن-۱} ی^{ن-۱}$

اور فرض کرو کہ سر سب کے سب مثبت ہیں، تب

$$\text{س}_{\text{ن}}(\text{۱} - \text{ی}) = \text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{ن-۱}}\,\text{ی}^{\text{ن}} - \text{ی}\Big\{(\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}}) + (\text{ا}_{\text{۱}} - \text{ا}_{\text{۲}})\,\text{ی} + (\text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}})\,\text{ی}^{\text{۲}} + \cdots + (\text{ا}_{\text{ن-۲}} - \text{ا}_{\text{ن-۱}})\,\text{ی}^{\text{ن-۲}}\Big\}؛$$

اب چونکہ سلسلہ $(\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}}) + (\text{ا}_{\text{۱}} - \text{ا}_{\text{۲}}) + (\text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}}) + \cdots$

مستدق ہے (دیکھو دفعہ ۱۹۴، نوٹ) اس لیے یہ دو سلسلے

$$(\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}}) + (\text{ا}_{\text{۱}} - \text{ا}_{\text{۲}})\,\text{جم ط} + (\text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}})\,\text{جم ۲ط} + \cdots$$

$$(\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}}) + (\text{ا}_{\text{۱}} - \text{ا}_{\text{۲}})\,\text{جب ط} + (\text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}})\,\text{جب ۲ط} + \cdots$$

بھی مستدق ہیں کیونکہ یہ سب جیوب اور جیوب التمام $\pm$ ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں، پس

سلسلہ $(\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}}) + (\text{ا}_{\text{۱}} - \text{ا}_{\text{۲}})\,\text{ی} + (\text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}})\,\text{ی}^{\text{۲}} + \cdots$

مستدق ہے اگر مق ی = ۱ - چونکہ $|\text{ا}_{\text{ن-۱}}\,\text{ی}^{\text{ن}}|$ کی انتہا صفر ہے جبکہ ن لامتناہی ہو اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نہا $\text{س}_{\text{ن}}$ (۱-ی) محدود ہے جبکہ مق ی = ۱،

پس نہا $\text{س}_{\text{ن}}$ محدود ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ی = ۱۔

اگر سلسلہ کی رقمیں تبادلاً مثبت اور منفی ہیں تو ی کو - ی میں بدلنے سے یہ صورت متذکرہ صدر صورت میں تحویل ہو جاتی ہے۔

لیکن جبکہ ی = ۱ یا متبادلہ علامتوں کے سروں کی صورت میں

جبکہ ی = -۱ سلسلہ کا مستدق ہونا متعین نہیں ہوا، اس کا انحصار سلسلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے - یہ ہو سکتا ہے کہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر صرف نیم مستدق ہو -

اگر سلسلہ کے سر ملتف ہوں تو ہم ایسے سلسلہ کو دو سلسلوں میں توڑ سکتے ہیں جن میں سے ایک میں سر حقیقی ہوں اور دوسرے میں خیالی - پھر ان دو سلسلوں پر الگ الگ غور کیا جا سکتا ہے -

(263)

$$\text{سلسلہ}\quad ۱ + \frac{ی}{۱} + \frac{ی^{۲}}{۲} + \frac{ی^{۳}}{۳} + \dots$$

مستدق ہے جبکہ مق ی = ۱ سوائے اس صورت کے جبکہ ی = ۱، پس یہ دو سلسلے

$\sum \frac{۱}{ن}$ جم ن ط، $\sum \frac{۱}{ن}$ جب ن ط دونوں مستدق ہیں سوائے اس کے کہ پہلا سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ ط صفر ہو یا π کا جفت ضعف -

۲۰۷ ـــــ فرض کرو کہ فا (لا)، لا کا وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ $ا_{.} + ا_{۱}\,لا + ا_{۲}\,لا^{۲} + \dots$ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جس کے سر حقیقی ہیں اور جو لا کی ایک سے چھوٹی حقیقی قیمتوں کے لئے مستدق ہے - ہم مان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ لا > ۱ لیکن یہ کہ سلسلہ $ا_{.} + ا_{۱} + ا_{۲} + \dots$ جو لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہے -

اب ہم یہ بتائینگے کہ سلسلہ $ا_{.} + ا_{۱} + ا_{۲} + \dots$ کا مجموعہ فا (لا) کی انتہا ہے جبکہ لا ایک سے چھوٹی قیمتوں سے بڑھ کر انتہائی قیمت ایک تک پہنچتا ہے - پس مسلسل تفاعل فا (لا) جو لا = ۱ کے لیے فا (۱) = $نہا_{لا=۱}$ فا (لا) سے تعبیر ہوتا ہے سلسلہ $ا_{.} + ا_{۱} + ا_{۲}\,لا^{۲} + \dots$ کے مجموعہ کو

تعبیر کرتا ہے جبکہ لا = ۱۔ یہ مسئلہ آبیل[1] نے بیان کیا تھا۔

فرض کرو کہ $س_ن = ا_۰ + ا_۱ + ا_۲ + \dots ا_ن$ تو $س = ا$ اور اس مسئلہ کی بموجب جو دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کیا جائیگا چونکہ سلسلے

$$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \dots + ا_ن لا^ن + \dots،$$

$$۱ + لا + لا^۲ + \dots + لا^ن + \dots$$

دونوں مطلقاً مستدق ہیں جبکہ لا < ۱، اس لیے ان کا حاصل ضرب

$$س_۰ + س_۱ لا + س_۲ لا^۲ + \dots + س_ن لا^ن + \dots$$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ فا (لا) / (۱ - لا) ہے جو اوپر کے دو سلسلوں کے انتہائی مجموعوں کا حاصلِ ضرب ہے۔ نہا $س_ن$ کو س سے تعبیر کرو تو عدد ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $س_ن$، $س_{ن+۱}$، $س_{ن+۲}$، .... سب کے سب س + صہ اور س - صہ کے درمیان واقع ہوں جہاں صہ اختیاری طور پر منتخبہ مثبت عدد ہے۔

ن کی ایسی کسی قیمت کے لیے $س_ن لا^ن + س_{ن+۱} لا^{ن+۱} + \dots$ کا مجموعہ

$$(س + صہ) لا^ن / (۱ - لا) \quad اور \quad (س - صہ) لا^ن / (۱ - لا)$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس لیے فا (لا)

$$(س + صہ) لا^ن + (۱ - لا) (س_۰ + س_۱ لا + \dots + س_{ن-۱} لا^{ن-۱})$$

---

[1] دیکھو Crelle's journal, Vol; I

اور $(س - صہ) لا^ن + (۱ - لا)(ب + س_۱ لا + \dots + س_{ن-۱} لا^{ن-۱})$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$|فا(لا) - س| < صہ + |س|(۱ - لا^ن) + (۱ - لا)(|ب| + |س_۱| + \dots + |س_{ن-۱}|)$$

صہ کے جواب میں عدد ن مقرر ہو جانے کے بعد ہم لا کی ایک قیمت (فرض کرو لا$_۱$) منتخب کر سکتے ہیں ایسی کہ $|فا(لا) - س|$ عدداً ۲ صہ سے چھوٹا ہو کیونکہ $۱ > لا \geqslant لا_۱$ اور $۱ - لا$ اور $۱ - لا^ن$ اتنے چھوٹے لیے جا سکتے ہیں جتنے ہم چاہیں اگر لا کا مناسب انتخاب کیا جائے۔ اب چونکہ ۲ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا(لا) کی انتہا لا = ۱ کے لئے س ہے۔ (264)

اگر $ا_۰، ا_۱، ا_۲ \dots$ ملتف عدد ہوں تو ہم سلسلہ کو دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں ایک حقیقی اور دوسرا خیالی۔ تب مسئلہ کا اطلاق ہر حصہ پر الگ الگ ہوتا ہے اور اس لیے وہ پورے سلسلہ کے لیے درست ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ فا(ی) وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots$ کے مجموعہ کو جبکہ مق ی < ۱ تعبیر کرتا ہے جہاں ملتف عدد ر(جم ط + خ جب ط) ہے۔ یہ سلسلہ اِن دو حصوں

$$ا_۰ + ا_۱ ر جم ط + ا_۲ ر^۲ جم ۲ ط + \dots ،$$

$$خ (ا_۱ ر جب ط + ا_۲ ر^۲ جب ۲ ط + \dots) ،$$

میں تقسیم ہو سکتا ہے اور مسئلہ بالا اِن دو سلسلوں میں سے ہر ایک کے لیے درست ہے۔ اس لیے اگر سلسلہ $ا_. + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots$ مستدق ہو جبکہ ی = جم ط + خ جب ط تو اس کا مجموعہ، ر = ۱ کے لیے فا (ی) کی انتہا ہے جبکہ ط کی قیمت کو مستقل رکھا جائے۔ تب وہ تفاعل جو اِس سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے استدقاق کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ پر مسلسل ہے بلحاظ ان نقاط کے جو اِس نقطہ میں سے گذرنیوالے استدقاق کے دائرہ کے نصف قطر پر ہیں۔

اِس دفعہ کی تحقیق کی ضرورت واضح کرنے کے لیے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر سلسلہ

$$ا_. + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots$$

کی رقموں کی ترتیب کو بدل دیا جائے تو اوپر کا مسئلہ نئے سلسلہ کے لیے درست نہ ہوگا۔ مثالاً اِن دو حقیقی سلسلوں

$$لا - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۴} لا^۴ + \ldots ، \text{ اور } لا + \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۵} لا^۵ + \frac{۱}{۷} لا^۷ - \frac{۱}{۴} لا^۴ + \ldots$$

پر غور کرو۔ جب تک کہ لا ایک سے چھوٹا رہتا ہے یہ سلسلے مطلقاً مستدق ہوتے ہیں اور اِن کا مجموعہ ایک ہی ہوتا ہے، لیکن جب، لا = ۱ تو اِن سلسلوں کے مجموعے مساوی نہیں ہوتے جیسا کہ دفعہ ۱۹۵ میں دکھایا جا چکا ہے۔ پہلے سلسلہ کا مجموعہ لا کی قیمت لا = ۱ پر مسلسل ہے لیکن دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایسا نہیں ہے۔

۲۰۸ ——— ی کی قوتوں کے دو الگ الگ سلسلے

$$ا_. + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots ،$$

$$ب_. + ب_۱ ی + ب_۲ ی^۲ + \ldots$$

نہیں ہو سکتے ایسے کہ دونوں، نصف قطر ک (>۰) کے دائرہ میں موقوعہ تمام نقطوں کے لیے ایک ہی قیمت فا (ی) کی طرف مستدق ہوں - چونکہ وہ ی = ۰ کے لیے ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیے $ا_۰ = ب_۰$، اور اس طرح یہ سلسلے $ا_۱$ ی + $ا_۲$ $ی^۲$ + ...، $ب_۱$ ی + $ب_۲$ $ی^۲$ +... ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ مق ی ≥ ک - یہ ناممکن ہے تاوقتیکہ یہ دو سلسلے

$ا_۱$ + $ا_۲$ ی + $ا_۳$ $ی^۲$ + ...، $ب_۱$ + $ب_۲$ ی + $ب_۳$ $ی^۲$ + ...

دونوں مستدق نہ ہوں اور مق ی ≥ ک کے لیے ان کے انتہائی مجموعے ایک ہی نہ ہوں - اِن دو سلسلوں کے استدقاق کے نصف قطروں میں سے ہر ایک ≤ ک اور ان کے مجموعہ تفاعل (Sum functions) دونوں ان کے استدقاق کے دائروں کے اندر مسلسل ہیں - چونکہ اِن کے مجموعہ تفاعل نصف قطر ک کے دائرہ کے اندر ی کی ہر قیمت کے لیے سوائے ی = ۰ کے مماثل ہیں اس لیے اِن تفاعلوں کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ مماثل ہیں جبکہ ی = ۰ اور اس لیے $ا_۱ = ب_۱$ - اِسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اِن دو سلسلوں کے تناظر سر سب کے سب مساوی ہیں اور اس لیے یہ سلسلے مماثل ہیں -

(265)

دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق

۲۰۹ —— فرض کرو کہ دو مطلقاً مستدق سلسلوں

$$ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \cdots + ا_ن + \cdots ،$$

$$ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \cdots + ب_ن + \cdots$$

کے انتہائی مجموعے س ، سَ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ

$$ا_۱ب_۱ + (ا_۱ب_۲ + ا_۲ب_۱) + \cdots + (ا_۱ب_ن + ا_۲ب_{ن-۱} + \cdots + ا_نب_۱) + \cdots$$

جو دیے ہوئے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س سَ ہے۔

اس حاصل ضربی سلسلے کی ن رقموں کے مجموعہ کو سن سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ا اور ب کے مقیاس علی الترتیب عہ اور بہ ہیں۔ اب چونکہ سلسلے س ، سَ مطلقاً مستدق ہیں، اس لیے مقیاسوں کے سلسلے مستدق ہیں؛ ان کے مجموعوں کو م ، مَ سے تعبیر کرو اور فرض کرو

$$ش_ن = عہ_۱ بہ_۱ + (عہ_۱ بہ_۲ + عہ_۲ بہ_۱) + \cdots + (عہ_۱ بہ_ن + عہ_۲ بہ_{ن-۱} + \cdots + عہ_ن بہ_۱)$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $س_ن سَ_ن - س_ن = ا_۲ب_ن + ا_۳ب_{ن-۱} + \cdots + ا_ن ب_ن$

اس لیے $مق(س_ن سَ_ن - س_ن) \leqslant عہ_۲ بہ_ن + عہ_۳ بہ_{ن-۱} + \cdots عہ_ن بہ_ن$

$$\leqslant م_ن مَ_ن - ش_ن$$

اب $ش_ن < م_ن مَ_ن < ش_{۲ن}$ کیونکہ $ش_{۲ن}$ میں حاصل ضرب $م_ن مَ_ن$ کی بہ نسبت زیادہ رقمیں ہیں اور $ش_ن$ میں م مَ کی بہ نسبت کم رقمیں ہیں؛ پس $ش_ن$ کی انتہا جبکہ ن کو لاانتہا بڑھایا جاتا ہے محدود ہے، اور چونکہ $ش_ن$ ، $ش_{۲ن}$ کی

انتہائیں ایک ہی ہونی چاہئیں اس لیے ان میں سے ہر ایک م مَ کے مساوی ہے۔ اس طرح مق (سن سَن ـ سن) کی انتہا صفر ہے یا س = س سَ ۔

زیادہ عام طور پر یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اِس مسئلہ کی صحت کے لیے یہ کافی ہے کہ سلسلوں ا١ + ا٢ + ...، ب١ + ب٢ + ... میں سے صرف ایک مطلقاً مستدق ہو اور دوسرا مشروطاً مستدق ۔ اگر یہ دو سلسلے صرف مشروطاً مستدق ہوں تو حاصل ضربی سلسلہ ا١ ب١ + (ا١ ب٢ + ا٢ ب١) + ... کا مستدق ہونا ضروری نہیں ہے لیکن اس کے مستدق ہونے کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اس کا مجموعہ دیے ہوئے دو سلسلوں کے مجموعوں کا حاصل ضرب ہے[1] ۔

دوہرے سلسلوں کا استدقاق

(266)

۲۱۰ ــــــ فرض کرو کہ مثبت حقیقی عددوں عہ ر،س کے ایک دوہرے تواتر

عہ١،١ ، عہ١،٢ ، عہ١،٣ ، .... ، عہ١،س ، ....

عہ٢،١ ، عہ٢،٢ ، عہ٢،٣ ، .... ، عہ٢،س ، ....

. . . .

عہ ر،١ ، عہ ر،٢ ، عہ ر،٣ ، .... ، عہ ر،س ، ....

. . . .

پر ہم غور کرتے ہیں ۔

---

[1] اِن نتیجوں کے ثبوت کے لیے دیکھو مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable صفحات ۵۰۰ ، ۵۰۱ ۔

مان لو کہ جب ہر صف کے عددوں کو باہم جمع کیا جاتا ہے تو ان کے مجموعہ کی ایک معین انتہا ہے؛ فرض کرو کہ پہلی، دوسری، ...، رویں، ... صفوں کے لیے اس انتہائی مجموعہ کی قیمتیں $\text{س}_{۱}$، $\text{س}_{۲}$، ...، $\text{س}_{\text{ر}}$، ... ہیں۔ نیز یہ مان لو کہ سلسلہ $\text{س}_{۱} + \text{س}_{۲} + \dots + \text{س}_{\text{ر}} + \dots$ مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔ یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ

$$\text{ع}_{۱،\text{س}} + \text{ع}_{۲،\text{س}} + \dots + \text{ع}_{\text{ر}،\text{س}} + \dots$$

جو کسی ایک ستون کے عددوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہے اور اگر اس کا انتہائی مجموعہ $\text{م}_{\text{س}}$ سے تعبیر ہو تو سلسلہ

$$\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲} + \text{م}_{۳} + \dots$$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔

یہ بات کہ $\text{ع}_{۱،\text{س}} + \text{ع}_{۲،\text{س}} + \dots + \text{ع}_{\text{ر}،\text{س}} + \dots$

مستدق ہے اس واقعہ سے منتج ہوتی ہے کہ اس سلسلہ کی ہر رقم مستدق سلسلہ $\text{س}_{۱} + \text{س}_{۲} + \dots + \text{س}_{\text{ر}} + \dots$ کی متناظر رقم سے چھوٹی ہے۔ ایک مثبت عدد پ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر اعداد

$$\text{م}_{۱} - \sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\text{پ}} \text{ع}_{\text{ن}،۱}،\quad \text{م}_{۲} - \sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\text{پ}} \text{ع}_{\text{ن}،۲}،\ \dots،\ \text{م}_{\text{ر}} - \sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\text{پ}} \text{ع}_{\text{ن}،\text{ر}}$$

سب کے سب $\frac{\text{صہ}}{\text{ر}}$ سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے

$$\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲} + \dots + \text{م}_{\text{ر}} < \text{صہ} + \text{س}_{۱} + \text{س}_{۲} + \dots + \text{س}_{\text{پ}} \text{ یا } < \text{صہ} + \text{س}$$

اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے سلسلہ $\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲} + \dots$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $\leqslant$ س، کیونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے - نیز عدد صحیح ق منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر اعداد

$$س_1 - \sum_{ن=1}^{ن=ق} ع_{1،ن}،\ س_2 - \sum_{ن=1}^{ن=ق} ع_{2،ن}،\ ...،\ س_ر - \sum_{ن=1}^{ن=ق} ع_{ر،ن}$$

سب کے سب $\frac{صہ}{ر}$ سے چھوٹے ہوں - اِس لیے سلسلہ $م_1 + م_2 + ...$ کا انتہائی مجموعہ $س_1 + س_2 + ... + س_ر$ - صہ سے بڑا ہے؛ اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے یہ انتہائی مجموعہ $\geqslant$ س - صہ - اب چونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے اسلئے سلسلہ $م_1 + م_2 + ...$ کا انتہائی مجموعہ $\geqslant$ س، لیکن یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ یہ انتہائی مجموعہ $\leqslant$ س - پس یہ انتہائی مجموعہ س کے مساوی ہے -

اگر مثبت اعداد $ع_{ر،س}$ ایسے ہوں کہ سلسلوں $ع_{ر،1} + ع_{ر،2} + ...$ میں سے ہر سلسلہ ایک عدد $س_ر$ کی طرف مستدق ہو اور اس طور پر کہ سلسلہ $س_1 + س_2 + ...$ مستدق ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد $ع_{ر،س}$ مثبت عددوں کے ایک مستدق دوہرے سلسلہ کی رقمیں ہیں اور اس سلسلہ کا مجموعہ س ہے - اِس ثابت شدہ مسئلہ کی بموجب اِس دوہرے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ وہی ہو گا خواہ عمل جمع پہلے س کے لحاظ سے اور پھر ر کے لحاظ سے ہو یا اِس ترتیب کے بالعکس - اس طرح

$$\sum_{ر=1}^{ر=\infty} \sum_{س=1}^{س=\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{س=\infty} \sum_{ر=1}^{ر=\infty} ع_{ر،س} = س$$

اگر عددوں $ع_{ر،س}$ پر ایک ہی علامت کے ہونے کی قید نہ ہو اور اگر اعداد

(267)

$|ع_{ر،س}|$ ایک مستدق دوہرے سلسلے کی رقمیں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد $ع_{ر،س}$ ایک **مطلقاً مستدق** دوہرے سلسلے کی رقمیں ہیں۔

اگر وہ دوہرا سلسلہ جس کی رقمیں $ع_{ر،س}$ ہیں مطلقاً مستدق ہو تو

$$\sum_{ر=1}^{\infty}\sum_{س=1}^{\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{\infty}\sum_{ر=1}^{\infty} ع_{ر،س}$$

کیونکہ فرض کرو $ع_{ر،س} = ب_{ر،س} - ج_{ر،س}$ جہاں $ج_{ر،س} = 0$ جبکہ $ع_{ر،س}$ مثبت ہوتا ہے اور $ب_{ر،س} = 0$ جبکہ $ع_{ر،س}$ منفی ہوتا ہے۔ پس دیے ہوئے سلسلہ کو دو سلسلوں کا فرق خیال کر سکتے ہیں جن کی رقمیں مثبت اعداد $ب_{ر،س}$ اور $ج_{ر،س}$ ہیں۔ اب چونکہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $ب_{ر،س} + ج_{ر،س}$ ہے مستدق ہے اسلئے وہ دو سلسلے جنکی عام رقمیں $ب_{ر،س}$ اور $ج_{ر،س}$ ہیں دونوں مستدق ہیں اور ان کے مجموعے کسی ایک ترتیب میں لئے جا سکتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ جسکی عام رقم $ع_{ر،س}$ ہے کسی ایک ترتیب میں حاصل جمع کو متاثر کئے بغیر لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ $\sum_{ر=1}^{\infty}\sum_{س=1}^{\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{\infty}\sum_{ر=1}^{\infty} ع_{ر،س}$

اس وقت بھی درست ہے جبکہ اعداد $ع_{ر،س}$ ملتف ہوں اگر مقیاسوں $|ع_{ر،س}|$ کا سلسلہ مطلقاً مستدق ہو۔ کیونکہ اگر $ع_{ر،س} = ج_{ر،س} + خ\,ضہ_{ر،س}$ تو وہ سلسلے

جن کی عام رقمیں $ج_{ر،س}$، $ض_{ر،س}$ ہیں دونوں مطلقاً مستدق ہیں اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ بر آمد ہوتا ہے۔

اِس عام مسئلہ کو شکل ذیل میں بھی بیان کیا جا سکتا ہے:۔

اگر $ا_1 + ا_2 + ا_3 + ا_4 + \ldots$ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک مستدق سلسلہ ہو اور اگر ہر رقم $ا_ر$ کو ایک مطلقاً مستدق سلسلہ

$$ا_{ر،1} + ا_{ر،2} + ا_{ر،3} + \ldots$$

کے انتہائی مجموعہ سے بیان کیا جائے تو دیے ہوئے سلسلہ کی بجائے، اس کے انتہائی مجموعہ کو بدلے بغیر، سلسلہ

$$\sum_{پ=1}^{پ=\infty} ا_{پ،1} + \sum_{پ=1}^{پ=\infty} ا_{پ،2} + \ldots \qquad (268)$$

رکھا جا سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ

$$س_1 + س_2 + س_3 + \ldots$$

مستدق ہو جہاں $س_ر$ سے

$$|ا_{ر،1}| + |ا_{ر،2}| + |ا_{ر،3}| + \ldots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کی ایک اہم صورت جس سے ہم بعد میں استفادہ کرینگے حسب ذیل ہے:۔

اگر $ا_0 + ا_1 ی + ا_2 ی^2 + \ldots$ ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا انتہائی مجموعہ فا(ما ی)

ہے اور اگر ا۰، ا۱، ا۲ . . . حسب ذیل مطلقاً مستدق سلسلوں

$$\text{ب}_{0,0} + \text{ب}_{0,1}\,\text{ما} + \text{ب}_{0,2}\,\text{ما}^{2} + \text{ب}_{0,3}\,\text{ما}^{3} + \dots$$

$$\text{ب}_{1,0} + \text{ب}_{1,1}\,\text{ما} + \text{ب}_{1,2}\,\text{ما}^{2} + \text{ب}_{1,3}\,\text{ما}^{3} + \dots$$

$$\text{ب}_{2,0} + \text{ب}_{2,1}\,\text{ما} + \text{ب}_{2,2}\,\text{ما}^{2} + \text{ب}_{2,3}\,\text{ما}^{3} + \dots$$

— — — — — — — — —

کے انتہائی مجموعے ہوں تب اگر سلسلہ $\text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}(\text{ی}) + \text{ا}_{2}(\text{ی})^{2} + \dots$ مستدق ہو جہاں اُسے سلسلہ $|\text{ب}_{\text{ر},0}| + |\text{ب}_{\text{ر},1}\,\text{ما}| + |\text{ب}_{\text{ر},2}\,\text{ما}^{2}| + \dots$ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے تو سلسلہ

$$(\text{ب}_{0,0} + \text{ب}_{1,0}\,\text{ی} + \text{ب}_{2,0}\,\text{ی}^{2} + \dots) + (\text{ب}_{0,1} + \text{ب}_{1,1}\,\text{ی} + \text{ب}_{2,1}\,\text{ی}^{2} + \dots)\,\text{ما}$$

$$+ (\text{ب}_{0,2} + \text{ب}_{1,2}\,\text{ی} + \text{ب}_{2,2}\,\text{ی}^{2} + \dots)\,\text{ما}^{2} + \dots$$

جو دیے ہوئے سلسلہ میں ا۰، ا۱، ا۲ . . . کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور جس کی رقموں کو ما کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ فا (ما، ی) ہے جو وہی ہے جو دیے ہوئے سلسلہ کا ہے۔

مسئلہ ثنائی

۲۱۱ ——— سلسلہ

$$1 + \text{م}\,\text{ی} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\lfloor 2}\,\text{ی}^{2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{\lfloor 3}\,\text{ی}^{3} + \dots$$

جس میں ی کی قوتیں صحیح اعداد ہیں اور جس کو ی کی صعودی قوتوں میں

ترتیب دیا گیا ہے ایک بہت اہم سلسلہ ہے۔

اُس خاص صورت میں جبکہ م مثبت صحیح عدد ہو یہ سلسلہ محدود ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ $(\text{۱} + \text{ی})^{\text{م}}$ ہوتا ہے۔ اس کا ثبوت جو بالعموم دیا جاتا ہے ی کی ملتف قیمت پر بھی اطلاق پذیر ہے۔

ہم فرض کرینگے کہ ی ایک ملتف عدد ہے لیکن اپنی توجہ صرف اُس صورت تک محدود رکھینگے جس میں م حقیقی ہو۔ اس صورت میں $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+\text{۱}}} = \frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ن}-\text{م}}$ جس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ اس لیے اس سلسلہ کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ اکائی نصف قطر کے اِس دائرہ کے اندر کسی نقطہ ی پر یہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اور اکائی سے کم نصف قطر والے کسی دائرہ میں یکساں طور پر مستدق ہے۔ (269)

سلسلہ کے انتہائی مجموعہ کو ف (م) سے تعبیر کرنے اور دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کرنے سے استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ نقطوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}}) \times \text{ف}(\text{م}_{\text{۲}}) = \text{ف}(\text{م}_{\text{۱}} + \text{م}_{\text{۲}})$$

اور اس لیے $\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۲}})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۳}}) \ldots \text{ف}(\text{م}_{\text{ق}}) = \text{ف}(\text{م}_{\text{۱}} + \text{م}_{\text{۲}} + \ldots + \text{م}_{\text{ق}})$

اول فرض کرو کہ م مختصر ترین شکل میں ایک مثبت کسر $\frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہے۔

رکھو $\text{م}_{\text{۱}} = \text{م}_{\text{۲}} = \ldots = \text{م}_{\text{ق}} = \frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ تو

$$\left[\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)\right]^{\text{ق}} = \text{ف}(\text{پ})$$

اس لیے ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$، ف (پ) کا ق واں جذر ہے یعنی $(۱+ی)^{پ}$ کا۔
فرض کرو کہ

$$۱ + ر\,جم\,طہ = م\,جم\,فہ،\quad ر\,جب\,طہ = م\,جب\,فہ$$

تب $\quad (۱+ی)^{پ} = م^{پ}\,(جم\,پ\,فہ + خ\,جب\,پ\,فہ)$

اور اس کے ق ویں جذروں کی قیمتیں ہیں

$$م^{\frac{پ}{ق}}\left\{جم\,\frac{پ\,فہ + ۲\,س\,\pi}{ق} + خ\,جب\,\frac{پ\,فہ + ۲\,س\,\pi}{ق}\right\}$$

جہاں س کی قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ق-۱ ہیں - نیز

$$م = +\sqrt{۱ + ۲\,ر\,جم\,طہ + ر^{۲}}$$

اور ہم فہ کو مستا $\frac{ر\,جب\,طہ}{۱ + ر\,جم\,طہ}$ کی وہ قیمت فرض کر سکتے ہیں جو حادہ ہے (مثبت یا منفی)؛ ایسی قیمت موجود ہوتی ہے کیونکہ جم فہ استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے۔
پس ہم دیکھتے ہیں کہ قتا $م^{\frac{پ}{ق}}\left\{جم\,\frac{پ\,فہ + ۲\,س\,\pi}{ق} + خ\,جب\,\frac{پ\,فہ + ۲\,س\,\pi}{ق}\right\}$ کی ایک قیمت ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$ ہے اور س کی ہمیشہ وہی قیمت ہونی چاہیے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ استدقاق کے دائرہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$ ایک مسلسل تفاعل ہے۔
س کی یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے رکھو فہ = ۰، تب ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$ حقیقی ہے

اور اس لیے

$$ق^{\frac{پ}{ق}} ر^{\frac{پ}{ق}} \left\{ جم \frac{۲ س \pi}{ق} + خ جب \frac{۲ س \pi}{ق} \right\}$$

کی ایک حقیقی قیمت کے مساوی ہونا چاہیے اور اس لیے س = ۰ یا س = $\frac{۱}{۲}$ ق اگر ق جفت ہے۔ اگر ر کافی طور پر چھوٹا ہے تو ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$ یقیناً مثبت ہے؛ اس لیے س، $\frac{۱}{۲}$ ق کے مساوی نہیں ہو سکتا اور اس لیے صفر ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ سلسلہ کا مجموعہ جبکہ م ایک ثبت منطق عدد $\frac{پ}{ق}$ ہو $(۱ + ی)^{\frac{پ}{ق}}$ کی خاص قیمت ہے یعنی

$$(۱ + ۲ ر جم ط + ر^۲)^{\frac{پ}{۲ق}} \left(جم \frac{پ فہ}{ق} + خ جب \frac{پ فہ}{ق} \right)$$

(270) جس میں جملہ $(۱ + ۲ ر جم ط + ر^۲)^{\frac{پ}{۲ق}}$ اپنی حقیقی قیمت رکھتا ہے اور فہ، مس$^{-۱}$ $\frac{ر جب ط}{۱ + ر جم ط}$ کی عددی طور پر کم سے کم قیمت ہے جہاں ی = ر (جم ط + خ جب ط)۔

ثانیاً فرض کرو کہ م ایک ثبت غیر منطق عدد ہے؛ ہم اِس کو ثبت منطق عددوں $م_۱$، $م_۲$، ... $م_ر$، ... کے ایک تواتر کی انتہا سمجھینگے۔ تب یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ف (م)، تواتر ف $(م_۱)$، ف $(م_۲)$، ... ف $(م_ر)$، ... کی انتہا ہے، یا ف (م) = نہا ف $(م_ر)$۔ استدقاق کے دائرہ کے اندر کسی نقطہ ی کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ف(م_ر) = ۱ + م_ر ی + \frac{م_ر(م_ر - ۱)}{\underline{|۲}} ی^۲ + \cdots + \frac{م_ر(م_ر - ۱)\cdots(م_ر - ن + ۲)}{\underline{|ن - ۱}} ی^{ن-۱} + ب_ن(ی)$$

جہاں $|ب_ن(ی)|$ مستدق سلسلہ

$$\frac{ن(ن+۱)\cdots(ن+ن-۱)}{\underline{|ن}} |ی|^ن + \frac{ن(ن+۱)\cdots(ن+ن)}{\underline{|ن+۱}} |ی|^{ن+۱} + \cdots$$

کے انتہائی مجموعہ سے کم ہے جس میں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے جو $م_۱$، $م_۲$، ....، $م_ر$، .... میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔ ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $|ب_ن(ی)| <$ صہ، تمام اعداد $م_ر$ کے لیے جہاں صہ اختیاری مثبت عدد ہے۔ یہ واضح ہے کہ محدود سلسلہ

$$۱ + م_ر ی + \frac{م_ر(م_ر - ۱)}{\underline{|۲}} ی^۲ + \cdots + \frac{م_ر(م_ر - ۱)\cdots(م_ر - ن + ۲)}{\underline{|ن - ۱}} ی^{ن-۱}$$

کے مجموعہ کی انتہا جبکہ $م_ر$، م کی طرف مستدق ہو یہ ہے

$$۱ + م ی + \frac{م(م - ۱)}{\underline{|۲}} ی^۲ + \cdots + \frac{م(م - ۱)\cdots(م - ن + ۲)}{\underline{|ن - ۱}} ی^{ن-۱}$$

اور اس لیے یہ، $ف(م_ر) - ب_ن(ی)$ کی انتہا ہے۔ غیر منطق قوت کی تعریف جو دفعہ ۱۸۶ میں دی گئی ہے اس کی بموجب $(۱ + ی)^{م_ر}$ کی خاص قیمت کی انتہا $(۱ + ی)^م$ ہے۔ چونکہ $|ب_ن(ی)|$ $<$ صہ تمام اعداد $م_۱$، $م_۲$، ...، $م_ر$، ... کے لئے اسلئے انتہا $|ب_ن(ی)|$ جسکی

ایک مُعیّن قیمت ہونی چاہیے $\leqslant$ صہ ہے۔
بس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{ی}^{\text{۲}} + \dots + \frac{\text{م(م-۱)}\dots\text{(م-ن+۲)}}{\underline{|\text{ن-۱}}}\,\text{ی}^{\text{ن-۱}}$$

(۱ + ی)$^{\text{م}}$ کی خاص قیمت سے بقدر ایک ایسے عدد کے مختلف ہے جس کا مقیاس ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے صہ سے بڑا نہیں ہے۔اس لیے ثابت ہوا کہ ثنائی سلسلہ، م کی مثبت غیر منطق قیمت کے لیے مستدق ہے اور (۱ + ی)$^{\text{م}}$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے۔

(271)

آخر میں فرض کرو کہ م ایک منفی عدد -م$_{\text{۱}}$ ہے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے ف (م) ف (م$_{\text{۱}}$) = ف (۰) = ۱، اس لیے ف (م) = $\frac{\text{۱}}{\text{ف (م}_{\text{۱}}\text{)}}$؛
یا ف (م)، (۱ + ی)$^{\text{م}_\text{۱}}$ کی صدر قیمت کا مقلوب ہے یا (۱ + ی)$^{\text{م}}$ کی صدر قیمت ہے۔

ہم اس پورے نتیجہ کو اِس طرح بیان کر سکتے ہیں:-

سلسلہ $\quad \text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{ی}^{\text{۲}} + \dots + \frac{\text{م(م-۱)}\dots\text{(م-ن+۱)}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ی}^{\text{ن}}$

کا مجموعہ، ی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ایک سے کم ہے، (۱ + ی)$^{\text{م}}$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے جو یہ ہے

$$\text{(۱ + ۲ ر جم ط + ر}^{\text{۲}}\text{)}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}}\ \text{(جم م فہ + خ جب م فہ)}$$

جبکہ م کوئی حقیقی عدد ہو۔ جملہ بالا میں ی کا مقیاس ر ہے اور

اس کی دلیل طہ ہے، اور فہست ا $\frac{\text{رجب طہ}}{\text{۱ + رجم طہ}}$ کی وہ قیمت ہے
جو $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ نتیجہ کوشی نے حاصل کیا تھا اور اسکی کتاب "Analyse Algébrique"
میں ملیگا۔

۲۱۲ —— اب صرف اُس صورت پر غور کرنا باقی رہگیا ہے جب کہ
ہق ی = ۱،

$$\text{سلسلہ}\quad ۱ + م + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}} + \dots$$

کی رقموں کو $ا$، $ا_۱$، $ا_۲$ ... سے تعبیر کریں تو $\frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن} = (م-ن) \backslash (ن+۱)$،
اگر ن > م تو یہ نسبت منفی ہے اور اس لیے ایک خاص رقم کے بعد اِس سلسلہ
کی رقمیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں۔ یہ سلسلہ دفعہ ۱۹۴ کی رو سے
مستدق ہے اگر بلحاظ مقدار اس کی رقمیں گھٹتی جائیں اور آخرالامر لاانتہا
چھوٹی ہو جائیں۔ یہ بات اُس وقت ہوگی جبکہ ن ـ م < ن + ۱ یعنے جبکہ
م > -۱، پس سلسلہ نیم مستدق ہوتا ہے اگر م > -۱؛ لیکن اگر م < -۱
تو وہ متسع ہوتا ہے کیونکہ رقموں کی مطلق مقداریں غیر معین طور پر بڑھتی ہیں۔
یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب، م > -۱ تو $ا_ن$ کی مطلق مقدار
غیر معین طور پر گھٹتی ہے جیسے ن غیر معین طور پر بڑھتا ہے ثبت عدد م + ۱
کی بجائے س لکھو اور $|ا_ن|$ کے لیے جو جملہ ہے اُس میں اجزائے ضربی
کی کسی خاص تعداد کے حاصل ضرب کو گ سے تعبیر کرو۔ تب اگر

س سے عین بڑا صحیح عدد ر ہو تو حاصل ہوتا ہے

$$|\text{ا}_\text{ن}| = \text{ک}\left(\text{ا} - \frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)\left(\text{ا} - \frac{\text{س}}{\text{ر}+\text{ا}}\right)\cdots\left(\text{ا} - \frac{\text{س}}{\text{ن}}\right)$$

$$< \text{ک}\left[\left(\text{ا} + \frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)\left(\text{ا} + \frac{\text{س}}{\text{ر}+\text{ا}}\right)\cdots\left(\text{ا} + \frac{\text{س}}{\text{ن}}\right)\right]^{-\text{ا}}$$

$$< \text{ک}\left[\text{ا} + \text{س}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ر}} + \frac{\text{ا}}{\text{ر}+\text{ا}} + \cdots + \frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)\right]^{-\text{ا}}$$

سلسلہ $\frac{\text{ا}}{\text{ر}} + \frac{\text{ا}}{\text{ر}+\text{ا}} + \frac{\text{ا}}{\text{ر}+\text{۲}} + \cdots$ کی پہلی ر رقموں کا مجموعہ $> \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ اور ان کے بعد ۲ ر رقموں کا مجموعہ بھی $> \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$، اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ن کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں سلسلہ کا مجموعہ $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کے کسی مقررہ ضعف سے بڑا ہوتا ہے اور اس لئے سلسلہ کا مجموعہ ن کے ساتھ لاانتہا بڑھتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $|\text{ا}_\text{ن}|$ لاانتہا گھٹتا ہے جیسے ن لاانتہا بڑھتا ہے۔ جب م = -ا تو ثنائی سلسلہ کی رقمیں متبادلاً +ا اور -ا ہیں اور اس لئے سلسلہ مستدق نہیں ہوتا۔

دفعہ ۲۰۶ کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ

$$\text{ا} + \text{م ی} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{ا})}{\lfloor\text{۲}} \text{ی}^{\text{۲}} + \cdots$$

مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ا بشرطیکہ م > -ا اور ی ≠ -ا

(272)

جب ی = -ا تو سلسلہ کی تمام رقمیں ایک خاص رقم کے بعد ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں؛ پس معلومہ جانچ

$$\text{نہا}_\text{ن}\left(\text{ا} + \frac{\text{ا}_\text{ن}}{\text{ا}_{\text{ن}-\text{ا}}}\right) < \text{ا}$$

لگانے سے سلسلہ مستدق ہوگا اگر

$$\text{نہا}_\text{ن}\left\{\text{ا} - (\text{ن} - \text{م} - \text{ا}) \big/ \text{ن}\right\} < \text{ا}،$$

یا اگر $م > ۰$

دفعہ ۲۰۷ میں مذکورہ مسئلہ کی بموجب جب سلسلہ

$$۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^{۲} + \ldots$$

استدقاق کے دائرہ پر مستدق ہوتا ہو تو اس کا مجموعہ جملہ

$$(۱ + ۲ ر جم طہ + ر^{۲})^{\frac{۱}{۲} م} (جم م فہ + خ ر جب م فہ)$$

کی قیمت ہے اس نقطہ پر۔ ہم پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:۔

سلسلہ $۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^{۲} + \ldots + \frac{م(م-۱)\ldots(م-ن+۱)}{\lfloor ۲} ی^{ن} + \ldots$

ی کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ م مثبت ہو؛ نیز مستدق ہوتا ہے اگر م صفر اور -۱ کے درمیان ہو ی کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ی = -۱ کے اور اس صورت میں ی کی دلیل π ہے۔ یہ سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ م = -۱ اور جبکہ م $<$ -۱ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے اس کا مجموعہ $(۲ + ۲ جم طہ)^{\frac{۱}{۲} م} (جم \frac{۱}{۲} م طہ + خ جب \frac{۱}{۲} م طہ)$ ہے جہاں طہ کی قیمت $\pm \pi$ کے درمیان واقع ہے۔

ابیل (Abel) نے ایک مقالہ میں جو (Crelle's journal v d.i) میں شائع ہوا تھا م کی مختلف قیمتوں کے لیے مسئلہ ثنائی کی عام صورت پر بحث کی ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۲۱۳ ـــــ عام شکل میں مسئلہ ثنائی کا ایک اہم اطلاق $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{م}}$ کا پھیلاؤ ہے جس کی خاص قیمت ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے جم م ط + خ جب م ط ہے اگر ط، $\pm\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{م}}$ کو شکل $\text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط} \times (1 + \text{خ مس ط})^{\text{م}}$ میں لکھنے سے

$$\text{جم م ط} + \text{خ جب م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\left[\left\{1 - \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\lfloor 2}\,\text{مس}^{2}\,\text{ط} + \dots\right\} + \text{خ}\left\{\text{م مس ط} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{\lfloor 3}\,\text{مس}^{3}\,\text{ط} + \dots\right\}\right]$$

بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو؛ یہ شرط پوری ہو گی اگر ط حدود $\pm\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو، اور نیز یہ شرط پوری ہو گی اگر ط = $\pm\frac{1}{4}\pi$ بشرطیکہ م > -۱،

(273)

(۱) فرض کرو کہ م ثبت ہے، تب

$$\text{جم م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\left\{1 - \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\lfloor 2}\,\text{مس}^{2}\,\text{ط} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{\lfloor 4}\,\text{مس}^{4}\,\text{ط} - \dots\right\} \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{جب م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\left\{\text{م مس ط} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{\lfloor 3}\,\text{مس}^{3}\,\text{ط} + \dots\right\} \quad \dots\dots(2)$$

م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ط، $\pm\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو، اور نیز یہ سلسلے درست ہیں ط = $\pm\frac{1}{4}\pi$ کے لیے بھی ـــ دفعہ ۱۵ میں

جو ضابطے حاصل کئے گئے تھے وہ مثبت صحیح عدد م کی صورت کے لیے تھے اور اِس صورت میں استدقاق کی شرط نہیں ہے۔ مندرجہ بالا نتیجے اِن ضابطوں کی توسیعات ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ م منفی ہے، تب م کو ـ م میں بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم م ط جم}^{\text{م}}\text{ط} = 1 - \frac{\text{م(م+۱)}}{\lfloor 2}\text{مس}^2\text{ط} + \frac{\text{م(م+۱)(م+۲)(م+۳)}}{\lfloor 4}\text{مس}^4\text{ط} + \ldots \quad \ldots (3)$$

$$\text{جب م ط جم}^{\text{م}}\text{ط} = \text{م مس ط} - \frac{\text{م(م+۱)(م+۲)}}{\lfloor 3}\text{مس}^3\text{ط} + \ldots \quad \ldots (4)$$

جو م کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہیں بشرطیکہ ط، $\pm \frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ یہ نتیجے ط $= \pm \frac{1}{4}\pi$ کے لیے صرف اُس صورت میں درست ہیں جبکہ م، ۱ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

۲۱۴ ــــــ دفعہ ماسبق کے ضابطے (۱) اور (۲) اُس صورت میں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو ساتویں باب میں جم م فہ اور جب م فہ کے جملوں کو جب فہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں حاصل کرنے میں استعمال ہو چکے ہیں۔ اب ہم اسی طرح کے جملے معلوم کرینگے جبکہ م مثبت صحیح عدد نہ ہو۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب، م ایک جفت مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم م فہ} = 1 - \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\text{جب}^2\text{فہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)}{\lfloor 4}\text{جب}^4\text{فہ}$$

$$- \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)(\text{م}^2-4^2)}{\lfloor 6}\text{جب}^6\text{فہ} + \ldots \quad \ldots (5)$$

اور جب م ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جب م فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)}{\lfloor 3} \text{جب}^3 \text{ فہ}$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)(\text{م}^2 - 3^2)}{\lfloor 5} \text{جب}^5 \text{ فہ} - \ldots\ldots \quad (6)$$

(274)

یہ جملے اِس طرح حاصل کیے گئے تھے کہ جم م فہ اور جب م فہ کے لیے جو جملے جم فہ اور جب فہ کی قوتوں میں تھے ان میں جم فہ کی قوتوں کی بجائے ۱ - جب^2 فہ کی قوتیں درج کی گئی تھیں اور پھر اِن قوتوں کو (جو مثبت صحیح عدد تھے) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر نتیجہ کو جب فہ کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا تھا۔ یہی سلسلے حاصل ہونگے جبکہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہو بلا لحاظ جفت یا طاق ہونے کے بشرطیکہ جم فہ مثبت ہو اور یہ اس وقت مثبت ہوگا جبکہ فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ اب ۱ - جم^2 فہ کی قوتیں ضرور نہیں کہ صحیح اعداد ہی ہوں لیکن مسئلہ ثنائی بر نہم اطلاق پذیر ہوگا کیونکہ تمام سلسلے مستدق ہونگے۔ چونکہ جب^2 فہ کی قوتوں کے تمام سلسلے مستدق ہوتے ہیں اور چونکہ جم م فہ، جب م فہ کے اصلی جملوں میں سے ہر جملہ میں رقموں کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہوتی ہے اس لیے پھیلاؤں کے نتیجے کو جب^2 فہ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلوں (۵) اور (۶) میں سے ہر ایک درست ہے بشرطیکہ فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو؛ پہلا سلسلہ رقموں کی محدود تعداد پر مشتمل نہیں ہوتا جب تک کہ م جفت نہ ہو، اور دوسرا سلسلہ جب تک کہ م طاق نہ ہو۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$$1 + \text{م}(\text{خ جب فہ}) + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}(\text{خ جب فہ})^2 + \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)}{\lfloor 3}(\text{خ جب فہ})^3 + \ldots\ldots$$

کا انتہائی مجموعہ ف (م) سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ، سلسلہ (۶) کو خ سے ضرب دیکر سلسلہ (۵) میں جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے۔ جب، م مثبت صحیح عدد ہو تو ف (م) = جم م فہ + خ جب م فہ اگر فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔ اب جبکہ م_1، م_2 صحیح اعداد ہوں تو

$$\text{ف}(\text{م}_1) \times \text{ف}(\text{م}_2) = (\text{جم م}_1\text{فہ} + \text{خ جب م}_1\text{فہ})(\text{جم م}_2\text{فہ} + \text{خ جب م}_2\text{فہ})$$

$$= \text{جم}(\text{م}_1 + \text{م}_2)\,\text{فہ} + \text{خ جب}(\text{م}_1 + \text{م}_2)\,\text{فہ}$$

$$= \text{ف}(\text{م}_1 + \text{م}_2)$$

اِن دو سلسلوں ف (م_1)، ف (م_2) کا حاصل ضرب ایک ہی شکل کا ہوگا خواہ م_1، م_2 کچھ ہی ہوں۔ پس دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کر کے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ مساوات

$$\text{ف}(\text{م}_1) \times \text{ف}(\text{م}_2) = \text{ف}(\text{م}_1 + \text{م}_2)$$

م_1 اور م_2 کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے کیونکہ سلسلے مطلقاً متدق ہیں۔ لہٰذا

$$\text{ف}(\text{م}_1)\,\text{ف}(\text{م}_2)\,\text{ف}(\text{م}_3)\ldots\text{ف}(\text{م}_\text{ق}) = \text{ف}(\text{م}_1 + \text{م}_2 + \cdots + \text{م}_\text{ق})$$

اب فرض کرو کہ $\text{م}_1 = \text{م}_2 = \ldots = \text{م}_\text{ق} = \frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ جہاں پ اور ق مثبت صحیح عدد ہیں تب

$$\left\{\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)\right\}^{\text{ق}} = \text{ف}(\text{پ})$$

پس $\{\text{ف}(\text{پ})\}^{\frac{1}{\text{ق}}}$ کی ایک قیمت ف $\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)$ ہے اور اس لیے اس کی شکل ہے

$$\text{جم}\,\frac{\text{پ فہ} + 2\text{س}\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{پ فہ} + 2\text{س}\pi}{\text{ق}}$$

جہاں س کوئی صحیح عدد ہے۔ اب جبکہ فہ = ۰ تو ف $(\frac{پ}{ق}) = ۱$،
اس لیے چونکہ مجموعہ ف $(\frac{پ}{ق})$ مسلسل بدلتا ہے جیسے فہ، $-\frac{۱}{۲}\pi$ سے
$+\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے ہمیں حاصل ہونا چاہئے س = ۰۔ اگر فہ اِن حدود کے
درمیان واقع ہے۔ پس اس صورت میں

$$ف\left(\frac{پ}{ق}\right) = جم\ \frac{پ\ فہ}{ق} + خ\ جب\ \frac{پ\ فہ}{ق} \qquad \text{میں}$$

ثانیاً فرض کرو کہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہے جو منطق اعداد $م_۱، م_۲، م_۳ ....$
کے ایک تواتر کی انتہا ہے۔ تب

$$ف(م_س) = ۱ + م_س\,(خ\ جب\ فہ) + \frac{م_س^۲}{\lfloor ۲}(خ\ جب\ فہ)^۲ + \ldots$$

$$+ \frac{م_س(م_س^۲ - ۱^۲)\ldots(م_س^۲ - \overline{۲ر - ۳}^۲)}{\lfloor ۲ر - ۱}(خ\ جب\ فہ)^{۲ر - ۱}$$

$$+ \frac{م_س^۲(م_س^۲ - ۲^۲)\ldots(م_س^۲ - \overline{۲ر - ۲}^۲)}{\lfloor ۲ر}(خ\ جب\ فہ)^{۲ر} + ب$$

جہاں |ب|، اِس مستدق سلسلہ

$$\frac{ن(ن^۲ + ۱^۲)\ldots(ن^۲ + \overline{۲ر - ۱}^۲)}{\lfloor ۲ر + ۱}\left|جب\ فہ\right|^{۲ر + ۱}$$

$$+ \frac{ن(ن^۲ + ۲^۲)\ldots(ن^۲ + \overline{۲ر}^۲)}{\lfloor ۲ر + ۲}\left|جب\ فہ\right|^{۲ر + ۲} + \ldots$$

کے انتہائی مجموعہ کے مقیاس سے کم ہے۔ ن ایک ثبت عدد ہے جو تمام اعداد م، م، ... سے بڑا ہے۔ فہ کی ہر مقررہ قیمت کے جواب میں ر منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ |ب| < صہ، م کی تمام قیمتوں م، م، م، ... کے لیے جہاں صہ کوئی اختیاری ثبت عدد ہے۔

ف (م) کی انتہا یعنی جم م فہ + خر جب م فہ کی انتہا جبکہ س کو لا انتہا بڑھا دیا جائے جم م فہ + خر جب م فہ ہے تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ا + م (خر جب فہ) + م² / |۲ (خر جب فہ)² + ...

+ م (م² - ا²) ... (م² - ۲ر - ۳²) / |۲ر - ا (خر جب فہ)^{۲ر - ا}

+ م² (م² - ۲²) ... (م² - ۲ر - ۲²) / |۲ر (خر جب فہ)^{۲ر}

اور جم م فہ + خر جب م فہ میں بقدر اُس عدد کے فرق ہے جس کا مقیاس صہ سے تجاوز نہیں کرتا۔ اب چونکہ صہ اختیاری ہے یہ ثابت ہو چکا کہ ± ½ π کے درمیان فہ کی ہر قیمت کے لیے لا تتناہی سلسلہ، جم م فہ + خر جب م فہ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ (276)

آخر الامر فرض کرو کہ م منطق یا غیر منطق منفی عدد - م ہے۔ تب چونکہ ف (م) ف (م) = ف (۰) = ۱، اس لیے

$$ف(م) = \frac{1}{\text{جم م فہ} + \text{خ جب م فہ}} = \text{جم م فہ} + \text{خ جب م فہ}$$

پس اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جم م فہ} = 1 - \frac{م^2}{\lfloor 2}\text{جب}^2\text{فہ} + \frac{م^2(م^2-2^2)}{\lfloor 4}\text{جب}^4\text{فہ} - \ldots\ldots ، \ldots \quad (5)$$

$$\text{جب م فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{م(م^2-1^2)}{\lfloor 3}\text{جب}^3\text{فہ}$$

$$+ \frac{م(م^2-1^2)(م^2-3^2)}{\lfloor 5}\text{جب}^5\text{فہ} - \ldots ، \ldots \quad (6)$$

درست ہیں فہ کی تمام قیمتوں کے لیے جو $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہوں خواہ م کوئی حقیقی عدد ہو۔

یہ دو سلسلے مطلقاً مستدق ہوتے ہیں جبکہ فہ $= \pm \frac{1}{2}\pi$ کیونکہ اِن میں سے پہلے سلسلہ کی عام رقم کی مطلق قیمت کو اِ سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ا_ر}{ا_{ر+1}} = \frac{(2ر+1)(2ر+2)}{(2ر)^2 - م^2} = \left(1 + \frac{3}{2ر} + \frac{1}{2ر^2}\right)\left(1 - \frac{م^2}{4ر^2}\right)^{-1}$$

اس لیے

$$\text{نہا}_ر\left(\frac{ا_ر}{ا_{ر+1}} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

اور اس طرح معلومہ جانچ کی بموجب سلسلہ مستدق ہے۔ اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ (۶) مستدق ہے۔ دفعہ ۲۰۷ میں بیان کردہ آبیل کے مسئلہ کی بموجب سلسلے (۵) اور (۶) قیمتوں جم $\frac{1}{2}$مπ ، $\pm$ جب $\frac{1}{2}$مπ کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ فہ $= \pm \frac{1}{2}\pi$۔

اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جم م فہ} \backslash \text{جم فہ} = ۱ - \frac{\text{م}^۲ - ۱^۲}{\lfloor ۲}\,\text{جب}^۲\,\text{فہ} + \frac{(\text{م}^۲ - ۱^۲)(\text{م}^۲ - ۳^۲)}{\lfloor ۴}\,\text{جب}^۴\,\text{فہ} - \ldots\text{،} \quad \ldots\ (۷)$$

$$\text{جب م فہ} \backslash \text{جم فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^۲ - ۲^۲)}{\lfloor ۳}\,\text{جب}^۳\,\text{فہ}$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^۲ - ۲^۲)(\text{م}^۲ - ۴^۲)}{\lfloor ۵}\,\text{جب}^۵\,\text{فہ} - \ldots\text{،} \ldots (۸)$$

درست ہیں م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے بشرطیکہ فہ، $\pm \frac{۱}{۲}$ π کے درمیان واقع ہو۔

سلسلے (۷) اور (۸) درست نہیں جبکہ فہ = $\pm \frac{۱}{۲}$ π۔

(277) سلسلہ (۷) صرف اس وقت مختتم ہوتا ہے جبکہ م ایک طاق صحیح عدد ہو اور سلسلہ (۸) صرف اس وقت جبکہ م ایک جفت صحیح عدد ہو۔

۲۱۵ ——— اگر ہم جم م فہ + خ جب م فہ کے لیے وہ سلسلہ لیں جو (۵) اور (۶) سے حاصل ہوتا ہے اور ی = خ جب فہ رکھیں تو چونکہ (جم فہ + خ جب فہ)$^\text{م}$ = $(\sqrt{۱ + \text{ی}^۲} + \text{ی})^\text{م}$ ہمیں یہ پھیلاؤ ملتا ہے

$$(\sqrt{۱ + \text{ی}^۲} + \text{ی})^\text{م} = ۱ + \text{م ی} + \frac{\text{م}^۲}{\lfloor ۲}\,\text{ی}^۲ + \frac{\text{م}(\text{م}^۲ - ۱^۲)}{\lfloor ۳}\,\text{ی}^۳ + \frac{\text{م}^۲(\text{م}^۲ - ۲^۲)}{\lfloor ۴}\,\text{ی}^۴$$

$$+ \ldots + \frac{\text{م}(\text{م}^۲ - ۱^۲)\ldots(\text{م}^۲ - \overline{۲\text{س} - ۳}^۲)}{\lfloor ۲\text{س} - ۱}\,\text{ی}^{۲\text{س} - ۱}$$

$$+ \frac{\text{م}^۲(\text{م}^۲ - ۲^۲)\ldots(\text{م}^۲ - \overline{۲\text{س} - ۲}^۲)}{\lfloor ۲\text{س}}\,\text{ی}^{۲\text{س}} + \ldots$$

اسی طرح (۷) اور (۸) سے

$$\left(\sqrt{1+ی^2}+ی\right)^{م} = 1 + م\,ی + \frac{م^2-1^2}{\lfloor 2}ی^2 + \frac{م(م^2-2^2)}{\lfloor 3}ی^3 + \cdots$$

$$+ \frac{م(م^2-2^2)\cdots(م^2-\overline{2س-2}^2)}{\lfloor 2س-1}ی^{2س-1}$$

$$+ \frac{(م^2-1^2)(م^2-3^2)\cdots(م^2-\overline{2س-1}^2)}{\lfloor 2س}ی^{2س} + \cdots$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ پھیلاؤ درست ہیں م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ی کا مقیاس ایک سے کم ہو۔ بعض مصنفین اِن پھیلاؤں کو بلا واسطہ راست حاصل کرتے ہیں اور پھر سلسلوں (۵)، (۶)، (۷)، اور (۸) کو اخذ کرتے ہیں۔ لیکن اِن سلسلوں کو ابتدائی طریقوں سے دریافت کرنا آسان نہیں ہے الّا آنکہ $ی \big/ \sqrt{1+ی^2}$ کا مقیاس ایک سے کم ہو؛ ہمیں اس قید کے ساتھ جم م فہ، جب م فہ کے لیے یہ سلسلے حاصل ہونگے صرف اس وقت جبکہ فہ، $\pm \frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو اور یہی قید سلسلوں (۱) اور (۲) کے لیے لازم ہے۔ تاہم تسلسل کے اصول کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کے پھیلاؤ، اِن سلسلوں کے استدقاق کی وسعت $|ی| < 1$ میں درست ہیں۔

۲۱۶ —— اگر سلسلوں (۵) اور (۶) میں فہ کی بجائے $\frac{1}{2}\pi -$ فہ

رکھا جائے تو ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو فہ کی صفر اور π کے درمیان قیمتوں کے لیے درست ہیں :-

$$\text{جتم م}\left(\frac{\pi}{2}-\text{فہ}\right)=1-\frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\text{ جتم}^2\text{ فہ}+\frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)}{\lfloor 4}\text{ جتم}^4\text{ فہ}-\ldots \quad (9)$$

$$\text{جب م}\left(\frac{\pi}{2}-\text{فہ}\right)=\text{م جتم فہ}-\frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\lfloor 3}\text{ جتم}^3\text{ فہ}+\ldots\ldots,\ldots \quad (10)$$

اب ہم جتم م فہ اور جب م فہ کے لیے سلسلے معلوم کر سکتے ہیں جبکہ فہ کی کوئی قیمت ہو[1]۔ اگر فہ = ر π + فہ، جہاں فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان ہے اور ر ایک صحیح عدد ہے تو (378)

$$\text{جتم م فہ}=\text{جتم م ر}\pi\text{ جتم م فہ}_1-\text{جب م ر}\pi\text{ جب م فہ}_1$$

نیز جب فہ = $(-1)^{\text{ر}}$ جب فہ، ۔ پس اگر فہ، $\left(\text{ر}\pm\frac{1}{2}\right)\pi$ کے درمیان واقع ہو

تو $$\text{جتم م فہ}=\text{جتم م ر}\pi\left(1-\frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\text{ جب}^2\text{ فہ}+\ldots\right)$$

$$-\text{جب (م-1) ر}\pi\left\{\text{م جب فہ}-\frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\lfloor 3}\text{ جب}^3\text{ فہ}+\ldots\right\}$$

$$\ldots \quad (11)$$

اسی طرح

$$\text{جب م فہ}=\text{جب م ر}\pi\left(1-\frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\text{ جب}^2\text{ فہ}+\ldots\right)$$

$$+\text{جتم (م-1) ر}\pi\left\{\text{م جب فہ}-\frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\lfloor 3}\text{ جب}^3\text{ فہ}+\ldots\right\},\ldots(12)$$

[1] ضابطوں (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) کو ڈی - ایف - گریگوری نے Cambridge Mathematical Journal vol. IV میں شایع کیا تھا۔

اسی طریقہ پر (۹) اور (۱۰) سے حسب ذیل سلسلے حاصل ہونگے :-

جم م فہ = جم م (۲ ر + ۱) ۲/π {۱ - م²/۲! جم² فہ + ...}

+ جم (م - ۱) (۲ ر + ۱) ۲/π {م جم فہ - م(م² - ۱²)/۳! جم³ فہ + ...} (۱۳)

جب م فہ = جب م (۲ ر + ۱) ۲/π {۱ - م²/۲! جم² فہ + ...}

+ جب (م - ۱) (۲ ر + ۱) ۲/π {م جم فہ - م(م² - ۱²)/۳! جم³ فہ + ...} (۱۴)

جہاں فہ، ر π اور (ر + ۱) π کے درمیان واقع ہے۔

۲۱۷ —— کچھ مفید سلسلے، (۵) اور (۶)، (۷) اور (۸) سے م کو مخصوص قیمتیں دینے سے اخذ کیے جا سکتے ہیں[۱]۔ فرض کرو فہ = ½ π تب (۵) اور (۶) میں م کی بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

جم ½ π لا = ۱ - لا²/۲! + لا²(لا² - ۲²)/۴! - ...، ... (۱۵)

جب ½ π لا = لا - لا(لا² - ۱²)/۳! + لا(لا² - ۱²)(لا² - ۳²)/۵! - ...، ... (۱۶)

نیز (۵) اور (۸) میں م = ۲ لا، فہ = ¼ π فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

---

[۱] اس دفعہ کے سلسلے شیل باک (Shellbach) نے حاصل کیے تھے، دیکھو "Crelle's Journal vol. XLVIII" ان پر گلیشر (Glaisher) نے بھی Messenger of Mathematics, vols. II & VII میں بحث کی ہے (۱۵) اور (۱۶) سے مماثل سلسلے ایم۔ ڈیوڈ نے " Bulletin de la Soc. Math. de France, vol. xi " میں دیئے ہیں۔

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\pi\ \text{لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1^2)}{\lfloor 4} - \frac{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1^2)(\text{لا}^2-2^2)}{\lfloor 6} + \cdots \quad (17)$$

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}(\text{لا}^2-1^2)}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}(\text{لا}^2-1^2)(\text{لا}^2-2^2)}{\lfloor 5} - \cdots\right\} \quad (18)$$

(279) π کی قوتوں کے لیے مختلف سلسلے حاصل کیے جا سکتے ہیں اس کے لیے جم $\frac{1}{2}\pi$ لا، جب $\frac{1}{2}\pi$ لا، ... کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے اور لا کی قوتوں کے سروں کو اوپر کے سلسلوں سے متناظر قوت کے سروں کے مساوی رکھا جائے؛ مثلاً (۱۶) سے لا^3 کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7}\times\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)$$
$$+ \cdots\cdots$$

کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں

۲۱۸ ـــــ اگر پھیلاؤں (۵) اور (۶) میں جو جم م فہ، جب م فہ کے لیے جب فہ کی قوتوں میں ہیں، ہم اِن سلسلوں کو م کی صعودی قوتوں کے سلسلوں کے طور پر مرتب کریں جو ہم دفعہ ۲۱۰ کی رو سے کر سکتے ہیں کیونکہ سلسلے

$$1 + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\ \text{جب}^2\ \text{فہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2+2^2)}{\lfloor 4}\ \text{جب}^4\ \text{فہ} + \cdots\cdots،$$

$$\text{م جب فہ} + \frac{\text{م}(\text{م}^2+1^2)}{\lfloor 3}\ \text{جب}^3\ \text{فہ} + \cdots\cdots$$

مستدق ہیں تو ہم م کی مختلف قوتوں کے سروں کو جم م فہ جب م فہ کے پھیلاؤں کے (جو فہ کی قوتوں میں ہوں) تناظر سروں کے مساوی رکھ سکتے ہیں؛ مثلاً (۶) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ} = \text{جب فہ} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{جب}^{۳}\text{فہ}}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\times\frac{\text{جب}^{۵}\text{فہ}}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{۱\times۳\times۵\times\dots(۲ر-۱)}{۲\times۴\times۶\dots۲ر}\,\frac{\text{جب}^{۲ر+۱}\text{فہ}}{۲ر+۱} + \dots \text{،} \dots \quad (۱۹)$$

اور (۵) سے

$$\text{فہ}^{۲} = \text{جب}^{۲}\text{فہ} + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{جب}^{۴}\text{فہ}}{۲} + \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\,\frac{\text{جب}^{۶}\text{فہ}}{۳} + \dots$$

$$+ \frac{۲\times۴\dots(۲ر-۲)}{۳\times۵\dots(۲ر-۱)}\,\frac{\text{جب}^{۲ر}\text{فہ}}{ر} + \dots \text{،} \dots \quad (۲۰)$$

یہ درست ہیں $\pm \frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان فہ کی قیمتوں کے لیے یا جبکہ فہ $= \pm \frac{۱}{۲}\pi$ ۔ ہم ان کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{جب}^{-۱}\text{لا} = \text{لا} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\,\frac{\text{لا}^{۵}}{۵} + \dots \text{،} \dots \quad (۱۹)$$

$$(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{۲} = \text{لا}^{۲} + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{لا}^{۴}}{۲} + \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\,\frac{\text{لا}^{۶}}{۳} + \dots \text{،} \dots \quad (۲۰)$$

جہاں $\text{جب}^{-۱}$ لا دونوں مساواتوں میں وہ مثبت یا منفی حادہ زاویہ ہے جس کی جیب لا کے مساوی ہے۔

سلسلہ (۱۹) کو نیوٹن نے دریافت کیا تھا؛ طریقِ ثبوت کوشی کا ہے

(280) ۲۱۹ ــــــــ سلسلہ (۲۰) میں لا کو لا + ھ میں بدلنے اور مساوات کی جانبین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے (یہ عمل لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے مماثل ہے جو دفعات ۲۱۰ اور ۲۰۸ کے مسئلوں کو استعمال کرنے سے جائز قرار دیا جاسکتا ہے) سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{لا} + \frac{2}{3}\text{لا}^3 + \frac{4\times2}{5\times3}\text{لا}^5 + \dots ، \dots \quad (21)$$

یا لا کی بجائے جب فہ رکھنے سے

$$\frac{\text{فہ}}{\text{جب فہ جم فہ}} = 1 + \frac{2}{3}\text{جب}^2\text{فہ} + \frac{4\times2}{5\times3}\text{جب}^4\text{فہ} + \dots ، \dots \quad (22)$$

یا ۲ فہ = طہ لکھنے سے

$$\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}} = 1 + \frac{1}{3}(1-\text{جم طہ}) + \frac{2\times1}{5\times3}(1-\text{جم طہ})^2 + \dots$$

جس کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{طہ قم طہ} = 1 + \frac{1}{3}\text{سہم طہ} + \frac{2\times1}{5\times3}\text{سہم}^2\text{طہ} + \dots ، \dots \quad (23)$$

نیز (۲۲) میں مس فہ = ما رکھنے سے سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}^{-1}\text{ما} = \frac{\text{ما}}{1+\text{ما}^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\text{ما}^2}{1+\text{ما}^2} + \frac{4\times2}{5\times3}\,\frac{\text{ما}^4}{(1+\text{ما}^2)^2} + \dots\right\}$$

.. (24)

جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کو ضِعفی زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام میں بیان کرنا

۲۲۰ ـــــــ اب ہم یہ دکھائینگے کہ شکل جم^م ط جب^ن ط کے جملے کس طرح آسانی کے ساتھ ط کے ضِعفوں کی جیوب یا جیوب التمام میں بیان کیے جا سکتے ہیں۔ ہم اول تو اُس صورت تک اپنی توجہ محدود رکھینگے جس میں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں۔ فرض کرو کہ ی = جم ط + خ جب ط، تب ی^{-۱} = جم ط - خ جب ط؛ پس ۲ جم ط = ی + ی^{-۱} اور ۲ خ جب ط = ی - ی^{-۱}، اور

(۲ جم ط)^م (۲ خ جب ط)^ن = (ی + ی^{-۱})^م (ی - ی^{-۱})^ن

اگر ہم بائیں طرف کے جملہ کو ی اور ی^{-۱} کی قوتوں میں پھیلائیں تو نتیجہ کو ایک ایسے سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے جس کی رقمیں اِن دو شکلوں ک (ی^ر + ی^{-ر})، ک (ی^ر - ی^{-ر}) میں سے ایک کے مانند ہونگی جہاں ک ایک ضارب ہے جو م، ن اور ر پر منحصر ہے۔

اب ی^ر = جم ر ط + خ جب ر ط اور ی^{-ر} = جم ر ط - خ جب ر ط بموجب مسئلہ ڈیموائر۔ اس لیے

ک (ی^ر + ی^{-ر}) = ۲ ک جم ر ط،

ک (ی^ر - ی^{-ر}) = ۲ خ ک جب ر ط

اس طرح ہمیں جم^م ط جب^ن ط کے لیے مطلوبہ جملہ ط کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں حاصل ہو چکا۔

(281)

مثال

جب^۵ ط جم^۶ ط کو ط کے ضعفوں کے سلسلہ میں بیان کرو۔
ہمیں حاصل ہوتا ہے

(۲ خ جب ط)^۵ (۲ جم ط)^۶ = (ی − ی^{-۱})^۵ (ی + ی^{-۱})^۶ = (ی^۲ − ی^{-۲})^۵ (ی + ی^{-۱})

یا = (ی^۱۰ − ۵ی^۶ + ۱۰ی^۲ − ۱۰ی^{-۲} + ۵ی^{-۶} − ی^{-۱۰}) (ی + ی^{-۱})

یا = ی^۱۱ + ی^۹ − ۵ی^۷ − ۵ی^۵ + ۱۰ی^۳ + ۱۰ی − ۱۰ی^{-۱} − ۱۰ی^{-۳} + ۵ی^{-۵} + ۵ی^{-۷} − ی^{-۹} − ی^{-۱۱}

جو ۲ خ (جب ۱۱ ط + جب ۹ ط − ۵ جب ۷ ط − ۵ جب ۵ ط + ۱۰ جب ۳ ط + ۱۰ جب ط) کے مساوی ہے

∴ جب^۵ ط جم^۶ ط = ۱/۲^۱۰ (جب ۱۱ ط + جب ۹ ط − ۵ جب ۷ ط − ۵ جب ۵ ط + ۱۰ جب ۳ ط + ۱۰ جب ط)

اس عمل کو اس طرح بھی مرتب کر سکتے ہیں:—

(۲ جم ط)^۶ = ۱ + ۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱

(۲ خ جب ط) (۲ جم ط)^۶ = ۱ + ۵ + ۹ + ۵ − ۵ − ۹ − ۵ − ۱

(۲ خ جب ط)^۲ (۲ جم ط)^۶ = ۱ + ۴ + ۴ − ۴ − ۱۰ − ۴ + ۴ + ۴ + ۱

(۲ خ جب طہ)^{۳} (۲ جم طہ)^{۶} = ۱ + ۳ + ۰ - ۸ - ۶ + ۶ + ۸ - ۰ - ۳ - ۱

(۲ خ جب طہ)^{۴} (۲ جم طہ)^{۶} = ۱ + ۲ - ۳ - ۸ + ۲ + ۱۲ + ۲ - ۸ - ۳ + ۲ + ۱

(۲ خ جب طہ)^{۵} (۲ جم طہ)^{۶} = ۱ + ۱ - ۵ - ۵ + ۱۰ + ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ + ۵ + ۵ - ۱ - ۱

جہاں بائیں جانب ی کی قوتیں ترک کر دی گئی ہیں اور کسی سطر کا کوئی عدد اس کے اوپر کی سطر میں جو عدد اِس کے عین سر پر ہے اِس کو اس سے ماقبل کے عدد میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

عددی اعمال حساب کو انجام دینے کا یہ سہولت بخش طریقہ ڈی مارگن[1] نے اپنی کتاب (Double Algebra and Trig.) میں دیا ہے۔

۲۲۱ —— ہم طہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں (۲ جم طہ)^{م} اور (۲ جب طہ)^{م} کے لیے ضابطے دفعہ ماسبق میں مستعملہ طریقہ کے ذریعہ حاصل کر سکتے ہیں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ چنانچہ

(۲ جم طہ)^{م} = (ی + ی̄)^{م} = ی^{م} + م ی$^{م-۲}$ + $\frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲}$ ی$^{م-۴}$ + ... + ی̄^{م} ،

اس لیے ۲$^{م-۱}$ جم^{م} طہ = جم م طہ + م جم (م-۲) طہ + $\frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲}$ جم (م-۴) طہ + ...

جہاں آخری رقم ہے

$\frac{۱}{۲}$ $\frac{\lfloor م}{\lfloor \frac{۱}{۲}م \; \lfloor \frac{۱}{۲}م}$ ، یا $\frac{\lfloor م}{\lfloor \frac{۱}{۲}م - ۱ \; \lfloor \frac{۱}{۲}م + ۱}$ جم طہ

[1] De Morgan.

بموجب اس کے کہ م جفت ہے یا طاق۔

اسی طرح

$$(۲ خ جب ط)^م = (ی - ی^{-۱})^م = ی^م - م ی^{م-۲} + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^{م-۴} - \ldots + (-۱)^م ی^{-م}$$

سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۲^{م-۱} (-۱)^{\frac{م}{۲}} جب^م ط = جم م ط - م جم (م-۲) ط + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} جم (م-۴) ط - \ldots$$

$$+ (-۱)^{\frac{م}{۲}} \frac{\lfloor م}{۲ \lfloor \frac{۱}{۲} م \lfloor \frac{۱}{۲} م}$$

جبکہ م جفت ہو، یا

$$۲^{م-۱} (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} جب^م ط = جب م ط - م جب (م-۲) ط + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} جب (م-۴) ط \quad (282)$$

$$- \ldots + (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} \frac{\lfloor م}{\lfloor (\frac{۱}{۲} م - ۱) \lfloor (\frac{۱}{۲} م - ۱)}$$

جبکہ م طاق ہو۔

یہ ضابطے ساتویں باب میں حاصل کیے جا چکے ہیں۔

۲۲۲ —— اب ہم ط کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں جم ط، جب ط کے اُن پھیلاؤں پر غور کرینگے جبکہ م، -۱ سے بڑا کوئی حقیقی عدد ہو۔

دفعہ ۲۱۲ کی رو سے

$۲^م (\pm جم \frac{۱}{۲} فہ)^م . جم م (\frac{۱}{۲} فہ - ک \pi)$

$= ۱ + م\ جم فہ + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} جم ۲ فہ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}} جم ۳ فہ + \ldots ،$

$۲^م (\pm جم \frac{۱}{۲} فہ)^م جب م (\frac{۱}{۲} فہ - ک \pi)$

$= م\ جب فہ + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} جب ۲ فہ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}} جب ۳ فہ + \ldots$

جہاں فہ، $(۲ک - ۱) \pi$ اور $(۲ک + ۱) \pi$ کے درمیان واقع ہے یہ سلسلہ اول کو جم عہ سے اور سلسلہ دوم کو جب عہ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$۲^م (\pm جم \frac{۱}{۲} فہ)^م جم (عہ - \frac{۱}{۲} م فہ + م ک \pi) = جم عہ + م\ جم (عہ - فہ)$

$+ \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} جم (عہ - ۲ فہ) + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}} جم (عہ - ۳ فہ) + \ldots$

جہاں فہ، $(۲ک - ۱) \pi$ اور $(۲ک + ۱) \pi$ کے درمیان واقع ہے۔ فرض کرو کہ فہ = ۲ طہ تب اگر ک جفت (= ۲ س) ہو تو

$۲^م . جم^م طہ . جم (عہ - م طہ + ۲ م س \pi)$

$= جم عہ + م . جم (عہ - ۲ طہ) + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} . جم (عہ - ۴ طہ) + \ldots$

جہاں طہ، $۲ س \pi - \frac{۱}{۲} \pi$ اور $۲ س \pi + \frac{۱}{۲} \pi$ کے درمیان واقع ہے۔
لیکن اگر ک طاق (= ۲ س + ۱) ہو تو

۲^م (- جم طہ)^م جم (عہ - م طہ + م ۲ س + ۱ π)

= جم عہ + م جم (عہ - ۲ طہ) + م(م - ۱)/۲! جم (عہ - ۴ طہ) + ...

جہاں طہ، ۲ س π + ½ π اور ۲ س π + ³⁄₂ π کے درمیان واقع ہے۔

ان نتیجوں میں رکھو عہ = م طہ تو

۲^م جم^م طہ جم ۲ م س π

= جم م طہ + م جم (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲! جم (م - ۴) طہ + ...، (۲۵)

(283) جہاں طہ، ۲ س π - ½ π اور ۲ س π + ½ π کے درمیان واقع ہے؛ نیز

۲^م (- جم طہ)^م جم (۲ س + ۱) م π

= جم م طہ + م جم (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲! جم (م - ۴) طہ + ...، (۲۶)

جہاں طہ، ۲ س π + ½ π اور ۲ س π + ³⁄₂ π کے درمیان واقع ہے۔

پھر، رکھو عہ = م طہ + ½ π تو

۲^م جم^م طہ جب ۲ م س π

= جب م طہ + م جب (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲! جب (م - ۴) طہ + ...، (۲۷)

جہاں طہ، ۲ س π - ½ π اور ۲ س π + ½ π کے درمیان واقع ہے؛ نیز

۲^م (- جم طہ)^م جب (۲ س + ۱) م π

= جب م طہ + م جب (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲! جب (م - ۴) طہ + ...، (۲۸)

جہاں طہ، ۲ س π + ½ π اور ۲ س π + ³⁄₂ π کے درمیان واقع ہے۔

پھر طہ کو طہ - ½ π میں بدلو اور رکھو عہ = م طہ تو

۲^م جب^م طہ جم م (۲ س + ½) π

= جم م طہ − م جم (م − ۲) طہ + [م (م − ۱) / ۲!] جم (م − ۴) طہ − ...، ... (۲۹)

جہاں طہ، ۲ س π اور (۲ س + ۱) π کے درمیان واقع ہے، نیز

۲^م (− جب طہ)^م جم م (۲ س + ۳/۲) π

= جم م طہ − م جم (م − ۲) طہ + [م (م − ۱) / ۲!] جم (م − ۴) طہ − ...، ... (۳۰)

جہاں طہ، (۲ س + ۱) π اور (۲ س + ۲) π کے درمیان واقع ہے۔
بالآخر رکھو ع = م طہ + ۱/۲ π اور طہ کو طہ − ۱/۲ π میں تبدیل کرو تو

۲^م جب^م طہ جب م (۲ س + ۱/۲) π

= جب م طہ − م جب (م − ۲) طہ + [م (م − ۱) / ۲!] جب (م − ۴) طہ − ...، ... (۳۱)

جہاں طہ، ۲ س π اور (۲ س + ۱) π کے درمیان واقع ہے، نیز

(− ۲ جب طہ)^م جب م (۲ س + ۳/۲) π

= جب م طہ − م جب (م − ۲) طہ + [م (م − ۱) / ۲!] جب (م − ۴) طہ ...، ... (۳۲)

جہاں طہ، (۲ س + ۱) π اور (۲ س + ۲) π کے درمیان واقع ہے۔
یہ سلسلے طہ کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہیں اگر م مثبت ہو۔ اگر م صفر اور − ۱ کے درمیان واقع ہے تو طہ کی انتہائی قیمتیں ۲ س π ± ۱/۲ π یا ۲ س π، (۲ س + ۱) π خارج کرنی چاہئیں کیونکہ طہ کی ان قیمتوں کے لئے سلسلے مستدق نہیں ہوتے۔

ایبل نے ثنائی مسئلہ پر اپنے مقالہ میں اس دفعہ کے آٹھ ضابطوں کو بیان کیا تھا لیکن معلوم ہوتا ہے کہ بعد کے مصنفین نے ان پر نظر نہیں ڈالی۔

———(✦)———

(284)

پندرھواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکارثم

قوت نمائی سلسلہ

۲۲۳ ـ لامتناہی سلسلہ

$$۱ + ی + \frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{ی^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots + \frac{ی^{ن}}{\lfloor ن} + \ldots$$

پرغور کرو جسکا انتہائی مجموعہ ہم ق (ی) سے تعبیر کرینگے جہاں ی ملتف عدد لا + خر ما ہے۔ اگر ی کا مقیاس ر ہو تو سلسلہ

$$۱ + ر + \frac{ر^{۲}}{\lfloor ۲} + \ldots\ldots$$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم کی نسبت ن ویں رقم کے ساتھ $\frac{ر}{ن}$ ہے جو مسلسل گھٹتی ہے جیسے ن بڑہتا ہے۔ پس ابتدائی سلسلہ ی کی تمام قیمتوں کے لئے مطلقاً مستدق ہے۔ اس سلسلہ کو قوت نمائی سلسلہ کہتے ہیں اور یہ کسی دائرہ میں جسکا مرکز ی = ۰ ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

۲۲۴ ـ یا اور یملہ کے جواب میں جو دو قوت نمائی سلسلے ہیں انکو

باہم ضرب دیا جائے تو $ی_۱$ اور $ی_۲$ میں م ویں درجے کی رقم ہے

$$\frac{ی_۱^{م}}{\lfloor م} + \frac{ی_۱^{م-۱}}{\lfloor م-۱}\cdot\frac{ی_۲}{\lfloor ۱} + \frac{ی_۱^{م-۲}}{\lfloor م-۲}\cdot\frac{ی_۲^{۲}}{\lfloor ۲} + \dots + \frac{ی_۲^{م}}{\lfloor م}$$

جو مسئلہ ثنائی کی رو سے $\frac{۱}{\lfloor م}(ی_۱ + ی_۲)^{م}$ کے مساوی ہے کیونکہ م مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے متذکرۂ صدر دو سلسلوں کے حاصل ضرب کے لئے یہ سلسلہ

$$۱ + (ی_۱ + ی_۲) + \frac{(ی_۱ + ی_۲)^{۲}}{\lfloor ۲} + \dots + \frac{(ی_۱ + ی_۲)^{م}}{\lfloor م} + \dots$$

حاصل ہوتا ہے جو $ق(ی_۱ + ی_۲)$ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اب دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کردہ مسئلہ سے چونکہ یہ قوت نمائی سلسلے دونوں مطلقاً مستدق ہیں اِنکے مجموعوں کا حاصل ضرب مندرجۂ بالا حاصل ضربی سلسلہ کے مجموعہ کے مساوی ہے، اس لئے

$$ق(ی_۱) \times ق(ی_۲) = ق(ی_۱ + ی_۲) \quad \dots\dots(۱)$$

اس بنیادی مساوات سے ہم فوراً اخذ کرتے ہیں

(285)

$$ق(ی_۱) \times ق(ی_۲) \times \dots \times ق(ی_ن) = ق(ی_۱ + ی_۲ + \dots + ی_ن)$$

اور اسلئے $\{ق(ی)\}^{ن} = ق(ن ی) \quad \dots\dots(۲)$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے[1]۔

۲۲۵ — اگر مساوات (۲) میں ی = ۱ رکھا جائے تو

$$ق(ن) = \{ق(۱)\}^{ن}$$

[1] یہ تحقیق کوشی سے منسوب ہے، دیکھو اسکی Analyse Algebrique -

جہاں ق (۱) سے سلسلہ

$$1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ آگے چلکر یہ دکھایا جائیگا کہ عدد ق (۱) ایک غیر منطق عدد ...۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹ ہے، اسکو بالعموم فو سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو تو ق (ن) = فوَن

پھر (۲) میں فرض کرو کہ ی = ف/ق جہاں ف اور ق ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں اور فرض کرو کہ ن = ق تو {ق (ف/ق)}ق = ق (ف)

اسلئے ق (ف/ق)، ق (ف) یا فوف کا ق واں جذر ہونا چاہیے۔

چونکہ ق (ف/ق) حقیقی اور مثبت ہے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ق (ف/ق)، قاثوف کی حقیقی مثبت قیمت ہے، اسکو ہم فوف/ق کی صدر قیمت کہینگے۔

قوت نمائی سلسلہ دفعات ۲۰۳ تا ۲۰۸ میں غور کردہ قوتی سلسلہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس کے استدقاق کا نصف قطر لا انتناہی ہے اور اس لئے کسی ثابت دائرہ میں جسکا مرکز ی = ۰ پر ہو یہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ مزید بریں دفعہ ۲۰۰ میں ثابت کردہ مسئلہ کی رو سے تفاعل ق (ی) کسی نقطہ ی پر مسلسل ہے۔ اگر لا کوئی دیا ہوا غیر منطق مثبت حقیقی عدد ہو تو اسکی تعریف مثبت منطق عددوں لا۱، لا۲، ... لام ... کے ایک تواتر کی انتہا سے ہو سکتی ہے۔ دفعہ ۱۸۶ میں بیان کردہ تعریف کی رو سے فولا کی صدر قیمت

فو^لام کی انتہا ہے جبکہ صحیح عدد م لا انتہا بڑھا دیا جائے؛ یہ معلوم ہے کہ یہ انتہا موجود ہوتی ہے اور اسکی قیمت منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر پر جو دئے ہوئے غیر منطق عدد لا کی تعریف کے لئے استعمال ہوا ہو منحصر نہیں ہوتی۔ چونکہ ق (لا) ایک مسلسل تفاعل ہے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ق (لا)، ق (لام) کی انتہا ہے جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔ پس چونکہ فو^لام = ق (لام)، م کی ہر قیمت کے لئے، اسلئے

فو^لا = ق (لا) جبکہ فو^لا اپنی صدر قیمت اختیار کرے۔

ثانیاً اگر لا کوئی منفی حقیقی عدد ہو تو چونکہ

ق (لا) ق (-لا) = ق (۰) = ۱

اسلئے ق (لا) = ۱/فو^-لا = فو^لا جہاں فو^لا، فو^-لا اپنی صدر قیمتیں اختیار کرتے ہیں

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ کسی حقیقی عدد لا کیلئے سلسلہ (286)

۱ + لا + لا^۲/|۲ + ۰۰۰

کا انتہائی مجموعہ، فو^لا کی صدر قیمت ہے جہاں فو کی تعریف ق (۱) = فو سے ہوئی ہے۔ یہ قوت نمائی مسئلہ ایک حقیقی قوت نما کے لئے ہے۔

۲۲۶ — اب ہم بتائینگے کہ خواہ ی کوئی ملتف عدد ہو عدد ق (ی) جو ی کی قوتوں میں قوت نمائی سلسلہ کا انتہائی مجموعہ ہے (۱ + ی/م)^م کی انتہائی قیمت کے مساوی ہے جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے

جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(1+\frac{ی}{م}\right)^{م} = 1 + م\frac{ی}{م} + \frac{م(م-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{ی^2}{م^2} + \dots + \frac{م(م-1)\dots(م-س+1)}{\lfloor س}\cdot\frac{ی^{س}}{م^{س}}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

$$= 1 + ی + \left(1-\frac{1}{م}\right)\frac{ی^2}{\lfloor 2} + \dots + \left(1-\frac{1}{م}\right)\left(1-\frac{2}{م}\right)\dots\left(1-\frac{س-1}{م}\right)\frac{ی^{س}}{\lfloor س}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

اب اگر ا، ب، ج، ... کوئی مثبت حقیقی عدد ہوں ایک سے کم تو

$$(1-ا)(1-ب) > 1-(ا+ب)$$

$$(1-ا)(1-ب)(1-ج) > (1-ا-ب)(1-ج)$$

$$> 1-(ا+ب+ج)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

پس $(1-ا)(1-ب)(1-ج)\dots < 1$ اور $> 1-(ا+ب+ج+\dots)$

اور (فرض کرو) $= 1-ط(ا+ب+ج+\dots)$

جہاں ط، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔ پس

$$\left(1-\frac{1}{م}\right)\left(1-\frac{2}{م}\right)\dots\left(1-\frac{س}{م}\right) = 1-ط_{س}\left(\frac{1}{م}+\frac{2}{م}+\dots+\frac{س}{م}\right)$$

$$= 1-ط_{س}\frac{س(س+1)}{2م}$$

جہاں $ط_{س}$، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔

اب

$$\left(1+\frac{\text{ی}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = 1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{\text{ی}^{\text{س}}}{\lfloor \text{س}} + \cdots + \frac{\text{ی}^{\text{م}}}{\lfloor \text{م}} + \text{ب}$$

جہاں ب،

$$-\frac{\text{ی}^{2}}{2\text{م}}\left\{1 + \text{ط}_{2}\times\frac{\text{ی}}{1} + \text{ط}_{3}\times\frac{\text{ی}^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \text{ط}_{\text{س}+1}\times\frac{\text{ی}^{\text{س}}}{\lfloor \text{س}} + \cdots + \text{ط}_{\text{م}-1}\times\frac{\text{ی}^{\text{م}-2}}{\lfloor \text{م}-2}\right\}$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

خطوط وحدانی کے اندرونی سلسلہ کے مجموعے کا مقیاس مستدق سلسلہ

$$1 + \frac{|\text{ی}|}{1} + \frac{|\text{ی}|^{2}}{2} + \cdots\cdots$$

(287) کے انتہائی مجموعے سے کم ہے؛ اور جب، م کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو $\frac{\text{ی}^{2}}{2\text{م}}$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اسلئے $\left(1+\frac{\text{ی}}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ کی انتہائی قیمت جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تفاعل ق(ی) ہے۔ عدد ھ، $\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}$ کی انتہائی قیمت ہے۔

۲۲۷ — دفعہ سابق میں ثابت کردہ مسئلہ سے ق(ی) کی قیمت معلوم کرنیکا طریقہ حاصل ہوتا ہے جہاں ی = لا + خ ما جو ایک ملتف عدد ہے۔ اس مسئلہ سے

$$\text{ق}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{نہا}\left(1+\frac{\text{لا}+\text{خ ما}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} ;$$

رکھو $۱ + \frac{لا}{م} = غہ\ جم\ فہ$، $\frac{ما}{م} = غہ\ جب\ فہ$ تو

$$\left(۱ + \frac{لا + خ\,ما}{م}\right)^{م} = غہ^{م}\left(جم\ فہ + خ\ جب\ فہ\right)^{م} = غہ^{م}\left(جم\ م\ فہ + خ\ جب\ م\ فہ\right)$$

حسب مسئلہ ڈیموائبر۔

نیز

$$غہ = \sqrt{۱ + \frac{۲لا}{م} + \frac{لا^{۲} + ما^{۲}}{م^{۲}}}$$

اور فہ، $مس^{-۱}\frac{ما}{لا + م}$ کی صدر قیمت ہے۔ $غہ^{م}$ کی انتہائی قیمت

$$\left(۱ + \frac{لا}{م}\right)^{م}\left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{(لا + م)^{۲}}\right\}^{\frac{۱}{۲}م}$$

کی انتہائی قیمت ہے یا

$$ق(لا)\left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{م\left(\sqrt{م} + لا/\sqrt{م}\right)^{۲}}\right\}^{\frac{۱}{۲}م}$$

کی انتہائی قیمت۔ اب فرض کرو کہ ر، $\sqrt{م} + لا/\sqrt{م}$ سے کم ایک ثابت مثبت عدد ہے، تب

$$\left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{م\left(\sqrt{م} + لا/\sqrt{م}\right)^{۲}}\right\}^{\frac{۱}{۲}م}$$

کی انتہا، ایک اور

$$\left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{م\,ر^{۲}}\right\}^{\frac{۱}{۲}م}$$

کے درمیان واقع ہے یا ایک اور $قو^{\frac{۱}{۲}ما^{۲}/ر^{۲}}$ کے درمیان۔ اب چونکہ

شرط $\text{ر} > \text{ما}\lfloor\text{م} + \text{لا}\backslash\text{ما}\lfloor\text{م}$ کے تحت ر کو اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں اسلئے

$$\left\{ ۱ + \frac{\text{ما}^{۲}}{(\text{لا} + \text{م})^{۲}} \right\}^{\frac{۱}{۲}\text{م}}$$

کی انتہا ایک ہے اور اسلئے $\text{غ}^{\text{م}}$ کی انتہا ق (لا) ہے جو $\text{ھ}^{\text{لا}}$ کی صدر قیمت ہے۔ $\text{م مس}^{-۱}\frac{\text{ما}}{\text{لا} + \text{م}}$ کی انتہائی قیمت، $\frac{\text{م ما}}{\text{لا} + \text{م}}$ کی انتہائی قیمت ہے جو ما ہے، پس

$$\text{نہا}\left(۱ + \frac{\text{لا} + \text{خ ما}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \text{ھ}^{\text{لا}}(\text{جم ما} + \text{خ جب ما})$$

جہاں $\text{ھ}^{\text{لا}}$ اپنی صدر قیمت رکھتا ہے، اس طرح

$$\text{ق}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{ھ}^{\text{لا}}(\text{جم ما} + \text{خ جب ما}) \qquad (288)$$

دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ

۲۲۸ — اگر ہم دفعہ سابق کے آخری نتیجہ میں لا = ۰ رکھیں تو

$$\text{ق}(\text{خ ما}) = \text{جم ما} + \text{خ جب ما}$$

اسلئے $\text{جم ما} + \text{خ جب ما} = ۱ + \text{خ ما} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\lfloor ۲} - \text{خ}\frac{\text{ما}^{۳}}{\lfloor ۳} + \ldots$

یا اس مساوات کی طرفین میں خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{جم ما} = ۱ - \frac{\text{ما}^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{ما}^{۴}}{|\underline{۴}} - \cdots + (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ما}^{۲\text{س}}}{|\underline{۲\text{س}}} + \cdots\cdots (۳)$$

$$\text{جب ما} = \text{ما} - \frac{\text{ما}^{۳}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{ما}^{۵}}{|\underline{۵}} \cdots\cdots + (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ما}^{۲\text{س}+۱}}{|\underline{۲\text{س}+۱}} + \cdots\cdots (۴)$$

پس جم ما اور جب ما کیلئے دائری ناپ ما کی قوتوں میں پھیلے ہوئے سلسلے حاصل ہو چکے، یہ سلسلے دفعہ ۹۹ میں حاصل کئے جا چکے تھے۔ ہم ان نتیجوں کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں:۔

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ما} &= \tfrac{۱}{۲}\{\text{ق}(\text{خ ما}) + \text{ق}(-\text{خ ما})\} \\ \text{جب ما} &= \tfrac{۱}{۲\text{خ}}\{\text{ق}(\text{خ ما}) - \text{ق}(-\text{خ ما})\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (۵)$$

دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں

۲۲۹۔ اگر ی حقیقی عدد ہو تو جملہ $\text{و}^{\text{ی}}$ بموجب تعریف مندرجہ جبر و مقابلہ کثیر القیمتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ی ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ اگر ی کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہو جو اپنی مختصر ترین شکل میں ہے تو $\text{و}^{\text{ف/ق}}$ کی ق قیمتیں ہیں یعنی $\text{و}^{\text{ف}}$ کے ق ویں جذر۔

ان قیمتوں میں سے وہ قیمت جو حقیقی اور مثبت ہے $\text{و}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کہلاتی ہے اور ق (ی) کے مساوی ہے۔ اگر ی ایک غیر منطق حقیقی عدد ہو تو $\text{و}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کی تعریف، حسب دفعہ ۱۸۶، اُس تواتر کی انتہا سے کیجاتی ہے جو $\text{و}^{\text{ی}_۱}$، $\text{و}^{\text{ی}_۲}$، ....، $\text{و}^{\text{ی}_\text{ر}}$، ..... کی صدر قیمتوں سے بنتا ہے جہاں $\text{ی}_۱$، $\text{ی}_۲$، .... $\text{ی}_\text{ر}$ ... منطق عددوں کا

ایک تواتر ہے جسکی انتہا ی ہے۔ ہم وی سے بالعموم ق (ی) کی صدر قیمت مراد لینگے۔

اگر ی حقیقی عدد نہ ہو تو وی کی کوئی تعریف تاحال نہیں دی گئی ہے اور یہ اس حد تک بے معنی رمز ہے۔ لیکن رمز وی یا و^لا+خ ما کو تعریف کے ذریعہ معنی پہنانا سہولت پیدا کرتا ہے۔ ہم وی کو جو معنی پہنائینگے اس کا صرف ایک جزو یہاں بیان کرینگے یعنی صرف اسکی تعریف کرینگے جسکو وی کی صدر قیمت کہا جاسکتا ہے، اور پھر زیادہ عام تعریف کی طرف رجوع ہونگے۔

(289)

تفاعل وی کی صدر قیمت کی تعریف ہم یہ کرینگے کہ وہ تفاعل ق (ی) ہے یا[1] (جسکے معنی وہی ہیں) تفاعل $(1+\frac{ی}{م})^{م}$ کی انتہا ہے جبکہ م کو مثبت صحیح قیمتوں میں سے لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ و^لا+خ ما کی صدر قیمت کی یہ تعریف ایسی ہے کہ یہ تفاعل قوتوں کے معمولی قانون کو پورا کرتا ہے یعنی

$$و^{لا_1+خ ما_1} \times و^{لا_2+خ ما_2} = و^{لا_1+لا_2+خ(ما_1+ما_2)}$$

[1] تعریف کی یہ آخری شکل Schlömilch کی مجوزہ ہے، دیکھو Zeitschrift für Math. Vol. VI.

یہ دفعہ ۲۲۴ کے مسئلہ (۱) سے مستنبط ہوتا ہے۔ ہم بالعموم رمز $\text{و}^{\text{ی}}$ سے جب کبھی یہ استعمال ہو اسکی صدر قیمت ق (ی)، حسب تعریف بالا، مراد لینگے۔

۲۳۰ — رمز $\text{و}^{\text{لا}+\text{خ ما}}$ کے مفہوم سے متعلق اِس قرار داد کے بعد دفعہ ۲۲۷ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{لا}+\text{خ ما}} = \text{و}^{\text{لا}}\left(\text{جم ما} + \text{خ جب ما}\right)$$

اور لا = ۰ رکھنے سے $\text{و}^{\text{خ ما}} = \text{جم ما} + \text{خ جب ما}$

مسئلہ (۵) کو اب لکھا جاسکتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ما} &= \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{خ ما}} + \bar{\text{و}}^{\text{خ ما}}\right) \\ \text{جب ما} &= \frac{1}{2\text{خ}}\left(\text{و}^{\text{خ ما}} - \bar{\text{و}}^{\text{خ ما}}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

اِنکو جیب التمام اور جیب کی قوت نمائی قیمتیں کہتے ہیں۔ طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مسئلہ (۶)، مساواتوں (۳) اور (۴) کو رمزی طریقہ میں لکھنے کے سوا اور کچھ نہیں ہے جنکو شکل (۵) میں بھی لکھا جاچکا ہے۔

رمز $\text{و}^{\text{خ ما}}$ کو رمز ق (خ ما) کی بجائے لکھنے میں صرف یہ فائدہ ہے کہ قبل الذکر سے ضرب کا وہ قانون جو دفعہ ۲۲۴ میں دیا گیا ہے بہت جلد ذہن میں آجاتا ہے۔ مسئلہ (۱) کی شکل وہی ہے جو حقیقی قوت نماؤں کو ضرب دینے کے لئے ہے؛ اس لئے قوت نماؤں کو خیالی قوتوں کے ساتھ لینے میں سہولت نظر آتی ہے جنکے لئے ضرب کا قانون وہی ہوگا جو (۱) سے بیان ہوتا ہے۔

۲۳۰ ا — تفاعل $\text{و}^{\text{ی}}$ کی تعریف، ی کی کسی ملتف قیمت کیلئے، اوپر یہ کی گئی ہے کہ وہ قوت نمائی سلسلہ

$$1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{2}}{\lfloor 2} + \frac{\text{ی}^{3}}{\lfloor 3} + \dots\dots\dots$$

کا انتہائی مجموعہ ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قو}^{\text{ی}} = 1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{2}}{\lfloor 2} + \dots\dots + \frac{\text{ی}^{\text{س}}}{\lfloor \text{س}} + \text{ب}_{\text{س}}$$

جہاں $|\text{ب}_{\text{س}}| \nless \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\lfloor \text{س}+1} + \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+2}}{\lfloor \text{س}+2} + \dots\dots$ ،

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$|\text{ب}_{\text{س}}| < \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\lfloor \text{س}+1}\left\{1 + |\text{ی}| + \frac{|\text{ی}|^{2}}{\lfloor 2} + \frac{|\text{ی}|^{3}}{\lfloor 3} + \dots\dots\right\} \tag{290}$$

یا $$< \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\lfloor \text{س}+1}\ \text{قو}^{|\text{ی}|}$$

اگر $|\text{ی}| < 1$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$|\text{ب}| < \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\lfloor \text{س}+1}\left\{1 + |\text{ی}| + |\text{ی}|^{2} + \dots\dots\right\}$$

یا $$|\text{ب}| < \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\lfloor \text{س}+1}\ \frac{1}{1-|\text{ی}|}$$

اس طرح ہم دکھا چکے کہ

$$\text{و}^{\text{ی}} = ۱ + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\underline{|۲}} + \ldots\ldots + \frac{\text{ی}^{\text{س}}}{\underline{|\text{س}}}\left(۱ + \text{ع}_{\text{س}}\right)$$

جہاں $|\text{ع}_{\text{س}}| < \frac{|\text{ی}|}{\underline{|\text{س}+۱}}\ \text{و}^{|\text{ی}|}$ ، اور اسلئے $|\text{ع}_{\text{س}}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ $|\text{ی}|$ صفر کی طرف مستدق ہو۔ خاص صورت میں $\text{س} = ۱$ لینے سے مسئلہ $\text{و}^{\text{ی}} = ۱ + \text{ی}\,(۱ + \text{ع}_{۱})$ حاصل ہوتا ہے جہاں $|\text{ع}_{۱}| < \frac{۱}{۲}\,|\text{ی}|\,\text{و}^{|\text{ی}|}$ ، اور اسلئے $|\text{ع}_{۱}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ $|\text{ی}|$ صفر کی طرف مستدق ہو۔ ہم اس نتیجہ کو شکل

$$\text{نہا}_{|\text{ی}|=۰}\ \frac{\text{و}^{\text{ی}} - ۱}{\text{ی}} = ۱$$

میں بیان کرسکتے ہیں۔

اس آخری نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے $\text{نہا}_{\text{ھ}=۰}\ \frac{\text{و}^{\text{ی}+\text{ھ}} - \text{و}^{\text{ی}}}{\text{ھ}} = \text{و}^{\text{ی}}$ اور

اس لئے تفاعل $\text{و}^{\text{ی}}$ ایسا ہے کہ وہ خود اپنے تفرقی سر کے مساوی ہے۔ علم تحلیل میں تفاعل $\text{و}^{\text{ی}}$ کی ابتدا اِس تعریف کے ساتھ کیجا سکتی ہے کہ وہ ایسا تفاعل ع ہے جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتا ہے :-

$$\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ی}} = \text{ع} \text{ ، ی کی ہر قیمت کے لئے}$$

اور $\text{ع} = ۱ \text{ جبکہ } \text{ی} = ۰$

اگر یہ مان لیا جائے کہ سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \ldots$ موجود ہے جو ی کی ہر قیمت کے لئے مستدق ہے اور ایسا ہے کہ اس کے مشتق سلسلہ $ا_۱ + ۲ ا_۲ ی + ۳ ا_۳ ی^۲ + \ldots$ میں بھی وہی خاصیت ہے تو دونوں سلسلے کسی محدود نصف قطر کے دائرہ میں یکساں طور پر مستدق ہوتے ہیں۔ پہلے سلسلہ کے مجموعہ کو ع سے تعبیر کیا جائے تو دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایک معلومہ مسئلہ کی رو سے $\frac{فرع}{فری}$ ہے۔ اگر اب $\frac{فرع}{فری} = ع$ تو ہم متناظر رقموں کے سروں کو مساوی رکھہ سکتے ہیں، اس طرح $ا_۱ = ا_۰$، $۲ا_۲ = ا_۱$، ...، $ن ا_ن = ا_{ن-۱}$ اور اسلئے $ا_ن = \frac{ا_۰}{|ن}$۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$ع = ا_۰ \left\{ ۱ + ی + \frac{ی^۲}{|۲} + \ldots + \frac{ی^ن}{|ن} + \ldots \right\}$$

اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ یکساں استدقاق کی مسلمہ شرطوں کو پورا کرتا ہے اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ شرط $\frac{فرع}{فری} = ع$ کو پورا کرتا ہے۔ اگر $ع = ۱$ جبکہ $ی = ۰$ تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے $ا_۰ = ۱$۔ اس طرح ہم سلسلہ

$$۱ + ی + \frac{ی^۲}{|۲} + \ldots + \frac{ی^ن}{|ن} + \ldots$$

پر پہنچتے ہیں جسکی تحقیق سے ہم نے اس باب کے مضمون کی ابتدا کی تھی۔

(291)

قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت

۱۳۲ — ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ ق (ی) = $قو^ل$ (جم ما + خ جیب ما)؛ اب چونکہ ما میں ۲ ک π جمع کرنے سے جہاں ک مثبت یا منفی

صحیح عدد ہے جم ما اور جب ما نہیں بدلتے اس لئے ق(ی) = ق(ی
+ ۲ خر ک π) یعنے ق (ی) دَوری (periodic) تفاعل ہے
جسکا دور ۲ خر π ہے۔ چونکہ $\text{نو}^{\text{ی}} = \text{نو}^{\text{ی} + ۲\text{ک خر}\,\pi}$ اسلئے قوت نمائی تفاعل
$\text{نو}^{\text{ی}}$ دَوری ہے اور اسکا خیالی دَور ۲ خر π ہے، نیز چونکہ $\text{نو}^{\text{خر ی}} =$
$\text{نو}^{\text{خر}(\text{ی} + ۲\text{ک}\,\pi)}$ اس لئے $\text{نو}^{\text{خر ی}}$، ی کا دوری تفاعل ہے جسکا حقیقی
دور ۲ π ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ $\text{نو}^{\text{ی}}$، $\text{نو}^{\text{خر ی}}$ میں سے ہر ایک تفاعل ایک
دَوری ہے، پہلے تفاعل کا خیالی دَور ۲ خر π ہے اور دوسرے
تفاعل کا حقیقی دَور ۲ π ۔ وہ طالب علم جو ناقصی تفاعلوں کے
مبادیات سے واقف ہے جان لیگا کہ ایسے تفاعلوں کا بنانا ممکن ہے
جنکے دور حقیقی اور خیالی دونوں ہوں، ایسے تفاعلوں کو دو دَوری کہتے ہیں

۲۳۲ ۔ دائری تفاعل جم ما، جب ما اولاً ہندسی تعریف
کے ذریعہ پیش کئے گئے تھے اور ہم نے اس کتاب کے ابتدائی
حصہ میں انکو ایک زاوئی مقدار کے تفاعلوں کے طور پر استعمال
کیا ہے جہاں یہ زاوئی مقدار دائری ناپ میں محسوب کیگئی تھی لیکن
ہم اس زاوئی مقدار کے تصور کو خارج کر سکتے ہیں اور انکو (جم ما، جب ما کو)
ایک متغیر کے تفاعل سمجھ سکتے ہیں، بلا شبہ متغیر کی کوئی قیمت
اس مقدار کو ایک زاویہ کے دائری ناپ میں پیمایش کرتی ہے
جسکے ذریعہ انکی تعریف ہوئی تھی۔ علم التحلیل میں ان تفاعلوں کی
بڑی اہمیت انکی اس خاصیت کی وجہ سے ہے کہ وہ ایک دَوری
تفاعل ہیں۔ فوریر اور دیگر علماء ریاضی نے یہ بتایا ہے کہ وہ تمام
تفاعل جو ایک حقیقی دَور رکھتے ہیں ان دائری تفاعلوں کے ایک

سلسلہ کے ذریعہ بعض حدود کے تحت تعبیر کئے جا سکتے ہیں لیکن علم التحلیل کی اِس اہم شاخ سے بحث کرنا اس کتاب کے مقصد سے خارج ہے۔

دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف

۲۳۳ — دائری تفاعلوں کی خالص تحلیلی تعریفیں دینا اور اِن تعریفوں سے انکی بنیادی تحلیلی خاصیتیں اخذ کرنا ممکن ہے تاکہ دائری تفاعلوں کا احصاء ایسی بنیاد پر قائم ہو سکے جو تمام ہندسی تعلقات سے آزاد ہو۔ اِن تعریفوں میں ملتف عدد کے دائری تفاعل بھی آجائینگے۔

(292)

ہم ی کی جیب التمام اور جیب کی تعریف اِن مساواتوں

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ی} &= \tfrac{1}{2}\{\text{ق}(\text{خ ی}) + \text{ق}(-\text{خ ی})\} \\ \text{جب ی} &= \tfrac{1}{2\text{خ}}\{\text{ق}(\text{خ ی}) - \text{ق}(-\text{خ ی})\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

کے ذریعہ کر سکتے ہیں جہاں ق (ی) سے سلسلہ $1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^2}{\lfloor 2} + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر ہم جم ی کی تعریف سلسلہ $1 - \frac{\text{ی}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{ی}^4}{\lfloor 4} - \ldots$ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ اور جب ی

کی تعریف سلسلہ $\text{ی} - \frac{\text{ی}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{ی}^5}{\lfloor 5} - \ldots$ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ کرتے ہیں۔ پس ہم اِن کو جیب التمام اور جیب کی عام تعریف سمجھ سکتے ہیں، اس میں ملتف دلیل کی صورت شامل ہے جو قبل الذکر ہندسی تعریفات میں شامل نہ تھی۔

ی کی حقیقی قیمتوں کے لئے تفاعلات جم ی اور جب ی

ہندسی تعریفات کے مطابق ہیں کیونکہ وہ سلسلے جنکو یہ تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کے مماثل ہیں جو دفعہ ۹۹ میں ہندسی تعریفوں کے ذریعہ حاصل ہوئے تھے۔

دفعہ ۲۳۰ (ا) میں ثابت کردہ مسئلہ $تو^{ی} = ۱ + ی + \frac{ی^۲}{\underline{|۲}} + \dots + \frac{ی^س}{\underline{|س}} + ب_س$

کو استعمال کرنے سے جہاں $|ب_س| < \frac{|ی|^{س+۱}}{\underline{|س+۱}} تو^{|ی|}$ ہم دیکھتے ہیں کہ

اگر ی کو خ ی اور -خ ی میں تبدیل کیا جائے اور س = ۲م + ۱ فرض کیا جائے اور پھر محصلہ جملوں کو جمع کیا جائے تو

$$جم\,ی = ۱ - \frac{ی^۲}{\underline{|۲}} + \frac{ی^۴}{\underline{|۴}} - \dots + (-۱)^م \frac{ی^{۲م}}{\underline{|۲م}} + \bar{ب}_م$$

جہاں $|\bar{ب}_م| < \frac{|ی|^{۲م+۲}}{\underline{|۲م+۲}} تو^{|ی|}$ ۔ بالخصوص $جم\,ی = ۱ + \bar{ب}_۰$

جہاں $|\bar{ب}_۰| < \frac{|ی|^۲}{\underline{|۳}} تو^{|ی|}$، اور $جم\,ی = ۱ - \frac{۱}{۲}ی^۲ + \bar{ب}_۱$ جہاں

$$|\bar{ب}_۱| < \frac{|ی|^۴}{\underline{|۴}} تو^{|ی|}،$$

نیز $|ی| < ۱$ کی صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|\bar{ب}_۰| < \frac{|ی|^۲}{۲(۱-|ی|)}$$

اور

$$|\bar{ب}_۱| < \frac{|ی|^۴}{\underline{|۴}(۱-|ی|)}$$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جب ی} = \text{ی} - \frac{\text{ی}^{3}}{\lfloor 3} + \frac{\text{ی}^{5}}{\lfloor 5} - \ldots + (-1)^{\text{م}} \frac{\text{ی}^{2\text{م}+1}}{\lfloor 2\text{م}+1} + \text{س}_{\text{م}}$$

جہاں $|\text{س}_{\text{م}}| < \frac{|\text{ی}|^{2\text{م}+3}}{\lfloor 2\text{م}+3}$ ق$^{|\text{ی}|}$ ، اور بالخصوص جب ی = ی + س. (293)

جہاں $|\text{س}_{0}| < \frac{|\text{ی}|^{3}}{\lfloor 3}$ ق$^{|\text{ی}|}$ ، اور جب ی = ی $- \frac{1}{6}$ ی^{3} + س$_{1}$

جہاں $|\text{س}_{1}| < \frac{|\text{ی}|^{5}}{\lfloor 5}$ ق$^{|\text{ی}|}$ ۔ اگر $|\text{ی}| < 1$ تو نیز حاصل ہوتا ہے

$$\text{س}_{0} < \frac{|\text{ی}|^{3}}{6(1-|\text{ی}|)} \text{ ، } |\text{س}_{1}| < \frac{|\text{ی}|^{5}}{\lfloor 5 \,(1-|\text{ی}|)}$$

۲۳۴ — دفعہ ۲۳۳ میں دی ہوئی تعریفوں سے اب ہم تفاعلات جم ی اور جب ی کی بنیادی خاصیتیں اخذ کر سکتے ہیں۔ چونکہ

جم ی + خ جب ی = ق (خ ی) ، اور جم ی − خ جب ی = ق (−خ ی)

اسلئے جم^{2} ی + جب^{2} ی = ق (خ ی) ق (−خ ی) = ق (۰) = ۱

نیز

$$\text{جم}(\text{ی}_1 + \text{ی}_2) = \frac{1}{2}\{\text{ق}(\text{خ ی}_1 + \text{خ ی}_2) + \text{ق}(-\text{خ ی}_1 - \text{خ ی}_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\text{ق}(\text{خ ی}_1)\,\text{ق}(\text{خ ی}_2) + \text{ق}(-\text{خ ی}_1)\,\text{ق}(-\text{خ ی}_2)\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\text{ق}(\text{خ ی}_1) + \text{ق}(-\text{خ ی}_1)\}\{\text{ق}(\text{خ ی}_2) + \text{ق}(-\text{خ ی}_2)\}$$

$+\frac{1}{4}$ {ق(خری$_1$) - ق(-خری$_1$)} {ق(خری$_2$) - ق(-خری$_2$)}

یا جم (ی$_1$ + ی$_2$) = جم ی$_1$ جم ی$_2$ - جب ی$_1$ جب ی$_2$

اسی طرح جب (ی$_1$ + ی$_2$) = جب ی$_1$ جم ی$_2$ + جم ی$_1$ جب ی$_2$

اس طرح جمع کے مسئلے ہماری تعریف سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

۲۳۵ — فرض کرو کہ ہم مساوات ق (ی) = ا پر غور کرتے ہیں۔ اول تو اس مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے کیونکہ قوت نما سلسلہ کے ذریعہ ق (ی) کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اس مساوات کی کوئی مثبت حقیقی اصل نہیں ہے اور نہ اسکی کوئی منفی حقیقی اصل - لا ہو سکتی ہے کیونکہ ایسی صورت میں مثبت عدد لا بھی ایک اصل ہوگی جیسا کہ رشتہ ق (-لا) ق (لا) = ا سے ظاہر ہے نیز مساوات ق (ی) = ا کی کوئی ملتف اصل عہ + خر بہ نہیں ہو سکتی جہاں ا عہ ا > ۰ - کیونکہ اگر عہ + خر بہ اصل ہو تو عہ - خر بہ بھی اصل ہے اور اس لئے ق (۲عہ) = ق (عہ + خر بہ) ق (عہ - خر بہ) = ا جو ناممکن ہے کیونکہ ۲ عہ اصل نہیں ہو سکتی۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات ق (ی) = ا کی اصلیں اصل ی = ۰ کے سوا کوئی اور ہوں تو وہ خالص خیالی ہونی چاہئیں۔ یہ دکھانے کے لئے کہ یہ مساوات ایسی ایک اصل رکھتی ہے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ مساوات ق (خر بہ) - ق (- خر بہ) = ۰ یعنی جب بہ = ۰ کی ایک حقیقی اصل صفر کے سوا ہے۔ اگر بہ ایسی ایک اصل ہو تو

$$ق (۲ خر بہ) = \{ق (خر بہ)\}^2 = ۱$$

اور اس طرح ق (ی) = ا کی ایک اصل ۲ خر بہ ہوگی۔

یہ دکھایا جائیگا کہ اگر مسلسل تفاعل $\frac{جب}{بہ}$ بہ کو جو سلسلہ

$$1-\frac{\text{به}^{2}}{\lfloor 3}+\frac{\text{به}^{4}}{\lfloor 5}-\dots\dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے ف (به) سے تعبیر کیا جائے تو
ف (به) مثبت ہے به کی تمام قیمتوں کے لئے ایسی کہ $0 \leq \text{به} \leq 3$
اور یہ کہ وہ منفی ہے جبکہ به = ۴ ۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ
۳ اور ۴ کے درمیان ایک قیمت کے لئے یا ایسی قیمتوں کی ایک طاق
تعداد کے لئے ف (به) صفر ہے ۔ اور کسی صورت میں ف (به) = ۰
کی عددی طور پر چھوٹی سے چھوٹی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان ہے
اگر اس مساوات کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں ۔

اگر به مثبت ہو اور $\sqrt{20}$ سے کم تو ف (به) کے سلسلہ میں
ہر رقم، به استثنائے رقم اول، مابعد کی رقم سے عدداً بڑی ہے۔
اس لئے $\text{ف}(\text{به}) > 1-\frac{\text{به}^{2}}{\lfloor 3}+\frac{\text{به}^{4}}{\lfloor 5}-\frac{\text{به}^{6}}{\lfloor 7}$ ، به کی اُن
قیمتوں کے لئے جو صفر اور ۳ سے بڑے کسی عدد کے درمیان ہوں

اب $1-\frac{\text{به}^{2}}{\lfloor 3}+\frac{\text{به}^{4}}{\lfloor 5}-\frac{\text{به}^{6}}{\lfloor 7}$ کو فہ (به) سے تعبیر کرنے سے
معلوم ہوتا ہے کہ $\text{فہ}(3)=\frac{17}{560}$ جو مثبت ہے، اور $\text{فہ}(0)=1$

نیز مشتق تفاعل $\text{فَہ}(\text{به}) \equiv -2\,\text{به}\left(\frac{1}{\lfloor 3}-\frac{2\,\text{به}^{2}}{\lfloor 5}+\frac{3\,\text{به}^{4}}{\lfloor 7}\right)$ منفی ہے
جبکہ به، صفر اور ۳ کے درمیان ہو کیونکہ

$$\frac{1}{\lfloor 3}-\frac{2\,\text{به}^{2}}{\lfloor 5}+\frac{3\,\text{به}^{4}}{\lfloor 7} > \frac{1}{\lfloor 3}-\frac{2\,\text{به}^{2}}{\lfloor 5} > \frac{1}{\lfloor 3}-\frac{3^{2}\times 2}{\lfloor 5} > 0$$

پس فہ (به)، ایک سے $\frac{17}{560}$ تک یکساں طور پر گھٹتا ہے جیسے به،

صفر سے ۳ تک بڑھتا ہے، اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (بہ)، صفر اور
۳ کے درمیان بہ کی قیمتوں کے لئے معدوم نہیں ہو سکتا۔ نیز

$$ف(4) < 1 - \frac{4^2}{3!} + \frac{4^4}{5!} - \frac{4^6}{7!} + \frac{4^8}{9!}$$

$$< 1 - \frac{8}{15} - \frac{7}{15} \times \frac{256}{189} < 0$$

اور اسلئے ۳ اور ۴ کے درمیان ف (بہ) کی کم سے کم ایک اصل
موجود ہے کیونکہ ف (۳) مثبت اور ف (۴) منفی ہے۔
ف (بہ) = ۰ کی عدداً چھوٹی سے چھوٹی اصل کو π سے
تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق (ی) = ۱ کی ایک اصل ۲π خ
ہے اور اس سے صغیر تر مقیاس کے ساتھ اس مساوات کی کوئی
اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے۔

موجودہ نقطۂ نظر سے عدد π کی تعریف اس عدد سے کیجاتی
ہے جو مساوات ق (۲π خ) = ۱ کو پورا کرے اور ایسا ہو کہ
کوئی عدد، صفر سے مختلف، صغیر تر مقیاس کے ساتھ مساوات
ق (ی) = ۱ کی اصل نہ ہو۔ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو مثبت یا منفی
تو ق (۲ک π خ) = {ق (۲π خ)}^ک = ۱، اور اسلئے مساوات ق (ی) = ۱
کی ایک اصل ۲ک π خ بھی ہے۔ نیز کوئی اصل ۲پ π خ موجود
نہیں ہے جہاں پ، ک اور ک + ۱ کے درمیان واقع ہے کیونکہ
ایسی صورت میں حاصل ہونا چاہیئے

ق (۲پ π خ - ۲ک π خ) = ق (۲پ π خ) ق (-۲ک π خ) = ۱

اور اس لئے ۲ (پ - ک) π خ جسکا مقیاس، ۲π خ کے مقیاس سے
صغیر تر ہے ق (ی) = ۱ کی اصل ہوگا جو اس مفروض کے خلاف ہے کہ ۲π خ

اُس اصل کو تعبیر کرتا ہے جسکا مقیاس صغیر ترین ہے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ مساوات ق (ی) = ۱ کی سب اصلیں شکل ۲ ک π خ کی ہیں جہاں ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور π ایک متعین عدد ہے جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے جیسا کہ اوپر ثابت کر دیا گیا۔

اس طرح عدد π کو تحلیلی نظریہ میں داخل کرنے کے بعد ی کی کسی قیمت کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ق (ی + ۲ π خ) = ق (ی) ق (۲ π خ) = ق (ی)

اور اس لئے تفاعل ق (ی) ایک دوری تفاعل ہے جسکا خیالی دور ۲ π خ ہے۔

جم ی اور جب ی کی تعریفوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ بھی دوری تفاعل ہیں جنکا دور ۲ π ہے، اسلئے جم ۲ π = جم ۰ = ۱ اور جب ۲ π = جب ۰ = ۰ ۔ ہم نے ابتک اس امر کی تصدیق نہیں کی کہ π حسب تعریف بالا اُس نسبت کے مماثل ہے جو ایک دائرے کے محیط کو اس کے قطر کے ساتھ ہوتی ہے لیکن اسکی تکمیل ایک حقیقی زاوئے کی صورت پر غور کرنے سے ہو سکتی ہے جس کے لئے جیب التمام یا جیب کا دور ۲ π ہے، عدد π کی کسی ایک تعریف کی بموجب۔

۲۳۶ — نیز چونکہ ق (خ π) × ق (خ π) = ق (۲ خ π) = ۱، اسلئے ق (خ π)، -۱ کے مساوی ہونا چاہئے کیونکہ وہ +۱ کے مساوی نہیں ہو سکتا اس وجہ سے کہ خ π، ق (ی) = ۱ کی اصل نہیں ہے۔

نیز ق (- خ π) = -۱ اسلئے جم π = -۱، جب π = ۰۔

پھر چونکہ ق ($\frac{1}{2}$ خ π) × ق ($\frac{1}{2}$ خ π) = ق (خ π) = -۱

اور ق ($\frac{1}{2}$ خ π) × ق (- $\frac{1}{2}$ خ π) = ۱

اسلئے ق ($\frac{1}{2}$ خ π) = ± خ اور ق (− $\frac{1}{2}$ خ π) = ∓ خ

اسلئے جم $\frac{1}{2}$ π = ۰ اور جب $\frac{1}{2}$ π = ± ۱، اس ابہام کو دور کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ی حقیقی ہو تو جب ی قیمتوں ی = ۰ اور ی = π کے درمیان لازماً مثبت ہے جیساکہ دفعہ ۲۳۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے، اس لئے جب $\frac{1}{2}$ π = + ۱ - اس طرح صفر، $\frac{1}{2}$ π، π، ۲ π کی جیب التمام اور جیب کی قیمتیں حاصل کرنیکے بعد ہم جمع کے مسئلوں کے ذریعہ جیب التمام اور جیب کے تفاعلوں کی تمام معمولی خاصیتیں ثابت کر سکتے ہیں۔

اب تفاعلات مس ی، مم ی، قطا ی، قم ی کی تعریفات علی الترتیب مساواتوں مس ی = جب ی \ جم ی، مم ی = جم ی \ جب ی، قطا ی = ۱ \ جم ی، قم ی = ۱ \ جب ی کے ذریعہ ہونگی اور پھر ہم اِن تفاعلات کی خاصیتیں معمولی طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

دائری تفاعلوں کی تمام خاصیتیں جو چوتھے، پانچویں، اور ساتویں باب میں تحقیق ہوئی تھیں جمع کے ضابطوں اور دوریت کی خاصیت سے اخذ ہوتی ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ تمام خاصیتیں جو حقیقی دلیلوں کیلئے وہاں ثابت کی گئی ہیں ملتف دلیلوں کے لئے بھی درست ہیں۔

(296) **۲۳۷ ۔** ایک اہم صورت وہ ہے جسمیں ی بالکلیہ خیالی ہو اور خ ما کے مساوی ہو۔ اس صورت میں

$$\text{جم خ ما} = \frac{1}{2}(\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}})\text{، جب خ ما} = \frac{\text{خ}}{2}(\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}})$$

$$\text{مس خ ما} = \text{خ}\,\frac{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}}$$

جملوں ½ (تو^ما + تو^-ما)، ½ (تو^ما - تو^-ما)، (تو^ما - تو^-ما) / (تو^ما + تو^-ما) کو علی الترتیب ما کی زائدی جیب التمام، جیب اور مماس کہتے ہیں اور ان کو جمز ما، جبز ما، مسز ما لکھتے ہیں، اس طرح

جمز ما = جم خ ما، جبز ما = - خ جب خ ما، مسز ما = - خ مس خ ما

ہم ان تفاعلوں پر ایک خاص باب میں غور کرینگے۔

طبعی لوکارتم

۲۳۸ — اگر ع = ق (ی) جو ملتف متغیری کا ایک واحد القیمت تفاعل ہے تو ہم ی = ق^-۱ (ع) کی تعریف اس طرح کرسکتے ہیں کہ وہ اساس تو پر ع کا لوکارتم ہے، لوکارتموں کا یہ نظام لوکارتموں کا طبعی نظام کہلاتا ہے۔ چونکہ ق (ی)، ی کے لحاظ سے دوری ہے اسلئے مقلوب تفاعل ق^-۱ (ی) لاانتہاہی حد تک کثیر القیمتی ہوگا۔ اگر ی کی ایک قیمت لوک ی ہو تو لوک ع کی عام قیمت لوک ع = لوک ع + ۲ خ ک π سے حاصل ہوگی۔ کیونکہ ق (ی) = ق (ی + ۲ خ ک π) جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ بالخصوص ایک مثبت حقیقی عدد لا کے لوکارتم لوک لا + ۲ خ ک π ہونگے جہاں لوک لا، لا کے معمولی حقیقی لوکارتم کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳۹ — فرض کرو ع$_{۱}$ = ق (ی$_{۱}$)، ع$_{۲}$ = ق (ی$_{۲}$)

تو چونکہ ق (ی$_{۱}$) × ق (ی$_{۲}$) = ق (ی$_{۱}$ + ی$_{۲}$)

اسلئے حاصل ضرب ع$_{۱}$ ع$_{۲}$ کے لوکارتم ق (ی$_{۱}$ + ی$_{۲}$) کے لوکارتم ہیں یعنی ی$_{۱}$ + ی$_{۲}$ + ۲ خ ک π، یا

لوک ع$_{۱}$ + لوک ع$_{۲}$ = لوک (ع$_{۱}$ ع$_{۲}$) + ۲ خ ک π

ہم جملہ ۲ خ ک π کو لوک (ع، ع۲) میں شامل فرض کر سکتے ہیں اور اس لئے مساوات بالا کو لکھہ سکتے ہیں

لوک (ع۱ ع۲) = لوک ع۱ + لوک ع۲

اس مساوات سے کسی ایک لوکارتم کی مخصوص قیمت متعین ہوتی ہے جبکہ دوسرے دو لوکارتم دئے گئے ہوں -

اب فرض کرو کہ ع = غہ (جم فہ + خ جب فہ) جہاں غہ حقیقی ہے تو اس نتیجہ سے جو ابھی ثابت ہوا حاصل ہوتا ہے لوک ع = لوک غہ + لوک (جم فہ + خ جب فہ)' اور چونکہ ق (خ فہ) = جم فہ + خ جب فہ اسلئے لوک (جم فہ + خ جب فہ) کی ایک قیمت خ فہ ہے اور لوک غہ کی عام قیمت لوک غہ + ۲ خ ک π ہے' پس لوک ع کی عام قیمت ہے

(297)

لوک ع = لوک غہ + خ (فہ + ۲ ک π)

جہاں لوک غہ سے لوک غہ کی اصلی قیمت مراد ہے -

اگر فہ پر - π اور + π کے درمیان ہونیکی قید ہو تو ہم لوک غہ + خ فہ کو لوک ع کی صدر قیمت کہینگے اور اس کو لوک ع سے تعبیر کرینگے' پس لوک ع کی عام قیمت

لوک ع = لوک ع + ۲ خ ک π

سے ملتی ہے جہاں لوک ع اسکی صدر قیمت اور ک مثبت یا منفی کوئی عدد صحیح ہے

ہم اس نتیجہ کو لکھ سکتے ہیں

لوک (لا + خ ما) = ۱/۲ لوک (لا^۲ + ما^۲) + خ (مس^-۱ ما/لا + ۲ک π)، ... (۸)

کسی حقیقی منفی عدد - لا کے لوکارتم کی صدر قیمت کی تعریف کافی طور پر نہیں ہوئی ہے کیونکہ ایسی کسی مقدار کی دلیل π ہوسکتی ہے یا - π، تاہم سہولت کے مدنظر ہم فرض کرینگے کہ اسکی صدر قیمت کے لئے دلیل π ہے اور اس لئے اسکی صدر قیمت لوک لا + خ π ہے اور اسکے لوکارتم کی عام قیمت لوک لا + (۲ک + ۱) خ π ہے۔

کسی حقیقی مثبت عدد لا کے لوکارتم کی عام قیمت

لوک لا = لوک لا + لوک ۱ = لوک لا + ۲ خ ک π

سے حاصل ہوتی ہے جہاں لوک لا صدر قیمت ہے۔

لوک خ کی صدر قیمت ۱/۲ π خ ہے، اسلئے لوک خ = (۲ک + ۱/۲) خ π،

لوک (- خ) کی صدر قیمت - ۱/۲ π خ ہے، اسلئے لوک (- خ) = (۲ک - ۱/۲) خ π -

ع کے لوکارتم کو مقیاس غہ اور دلیل فہ کا ایک واحد القیمت تفاعل سمجھ کر اس پر غور کرنا ممکن ہے جبکہ دلیل فہ، - ∞ سے + ∞ تک تمام قیمتوں میں سے گذرتی ہوئی فرض کیجائے اور اسپر π اور - π کے درمیان واقع ہونے کی قید نہ ہو جیساکہ اس سے قبل تھی۔ تب ع کا لوکارتم غہ اور فہ کا واحد القیمت تفاعل لوک غہ + خ فہ ہے، اور ہر دفعہ جبکہ فہ میں ۲ π کا اضافہ ہوتا ہے یہ لوکارتم بقدر ۲ خ π کے بڑھتا ہے اور عدد ع کی عددی قیمت وہی ہوتی ہے جو پہلے تھی۔ وہ طالب علم جو ریمان (Reimaum) کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے کثیر القیمت تفاعل کو ایک واحد القیمت تفاعل میں بدلکر غور کرنیکے اس طریقہ کے پورے فوائد کا اندازہ کرسکیگا۔

عام قوت نما تفاعل

۲۴۰ - اگر ا کوئی عدد ہو حقیقی یا ملتف تو رمز ا^ی سے ق (ی لوک ا)

مُراد لیا جا سکتا ہے جہاں لوک ا، اپنی قیمتوں کی لاانتہا تعداد میں سے کوئی ایک قیمت اختیار کرتا ہے۔ اگر لوک ا، اپنی صدر قیمت لوک ا اختیار کرے تو ہم ق (ی لوک ا) کو $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کہینگے۔

چونکہ
$$\text{ق (ی لوک ا)} = \text{۱} + \frac{\text{ی لوک ا}}{\text{۱}} + \frac{(\text{ی لوک ا})^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \cdots \qquad (298)$$

اسلئے عام قوت نما سلسلہ ہے
$$\text{ا}^{\text{ی}} = \text{۱} + \frac{\text{ی لوک ا}}{\text{۱}} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}(\text{لوک ا})^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \cdots\cdots$$

اور $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت
$$\text{ا}^{\text{ی}} = \text{۱} + \frac{\text{ی لوک ا}}{\underline{|\text{۱}}} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}(\text{لوک ا})^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \cdots\cdots$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر ا اور ی دونوں حقیقی ہوں تو قوت نما سلسلہ کی معمولی شکل
$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{۱} + \frac{\text{لا لوک ا}}{\underline{|\text{۱}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}(\text{لوک ا})^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \cdots\cdots$$

حاصل ہوتی ہے جس سے $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی صدر قیمت ملتی ہے۔

۲۴۱ — مخصوص صورت ا = نو میں

$$\text{لوک نو} = \text{لوک نو} + \text{۲ خرک}\,\pi = \text{۱} + \text{۲ خرک}\,\pi$$

اور رمز $\text{نو}^{\text{ی}}$ کے عام معنے ق (ی لوک نو) یا ق (ی + ۲ خرک π ی) ہیں۔ $\text{نو}^{\text{ی}}$ کی عام قیمت ق (ی) ہے اور یہ اُس تعریف کے مطابق ہے جو دفعہ ۲۲۹ میں دیگئی تھی۔ اسلئے $\text{نو}^{\text{ی}}$ کی عام قیمت

ق (ی) (جم ۲ ک π ی + خ جب ۲ ک π ی)

ہے۔ ہم اب بھی رمز نو^ی سے اسکی صدر قیمت مراد لیتے رہیں گے۔

۲۴۲ — ا^ی کی عام قیمت حسب تعریف بالا ق {ی (لوک ر + خ طہ + ۲ خ ک π)} کے مماثل ہے جہاں ا = ر (جم طہ + خ جب طہ) = عہ + خ بہ اور طہ، − π اور π کے درمیان واقع ہے، ی = لا + خ ما لکھنے سے (عہ + خ بہ)^{لا + خ ما} کی عام قیمت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

ق {لا لوک ر − طہ ما − ۲ ک π ما + خ (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)}

جو نو^{لا لوک ر − طہ ما − ۲ ک π ما} {جم (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)

+ خ جب (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)}

کے مساوی ہے۔ اسلئے (عہ + خ بہ)^{لا + خ ما} کی صدر قیمت ہے

نو^{لا لوک ر − طہ ما} {جم (ما لوک ر + لا طہ) + خ جب (ما لوک ر + لا طہ)}

جہاں ر = $\sqrt{}$عہ^۲ + بہ^۲، طہ = مس^{-۱} بہ/عہ

یہ ضروری نہیں کہ مس^{-۱} بہ/عہ کی صدر قیمت جس کی تعریف دفعہ ۔۔ میں کی گئی ہے لی جائے۔

اگر ر = ۱ تو (جم طہ + خ جب طہ)^{لا + خ ما} کی صدر قیمت کے لئے

تفاعل ق {خ طہ (لا + خ ما)} حاصل ہوتا ہے جسکو شکل جم (لا + خ ما) طہ

+ جب (لا + خر ما) طہ میں لکھا جا سکتا ہے، یہ ڈیموائر کے مسئلہ کی توسیع ہے جبکہ قوت نما ملتف ہو۔

(299)

۲۴۳۔ مساوات $\text{ا}^{\text{ی}_1} \times \text{ا}^{\text{ی}_2} = \text{ا}^{\text{ی}_1+\text{ی}_2}$ کے درست رہنے کے لئے ہمیں یہ فرض کرنا پڑیگا کہ $\text{ا}^{\text{ی}_1}$، $\text{ا}^{\text{ی}_2}$، $\text{ا}^{\text{ی}_1+\text{ی}_2}$ کی قیمتیں وہ ہیں جو لوک ا کی ایک ہی قیمت کے متناظر ہیں، ایسی صورت میں

$$\text{ا}^{\text{ی}_1} \times \text{ا}^{\text{ی}_2} = \text{ق}\{\text{ی}_1(\text{لوک ا} + ۲\,\text{خر ک}\,\pi)\} \times \text{ق}\{\text{ی}_2(\text{لوک ا} + ۲\,\text{خر ک}\,\pi)\}$$

$$= \text{ق}\{(\text{ی}_1 + \text{ی}_2)(\text{لوک ا} + ۲\,\text{خر ک}\,\pi)\}$$

$$= \text{ا}^{\text{ی}_1+\text{ی}_2}$$

لیکن یہ مساوات درست نہیں ہو گی اگر ان دو تفاعلوں $\text{ا}^{\text{ی}_1}$، $\text{ا}^{\text{ی}_2}$ میں ہم ک کی مختلف قیمتیں لینگے۔ بالخصوص مساوات $\text{ا}^{\text{ی}_1} \times \text{ا}^{\text{ی}_2} = \text{ا}^{\text{ی}_1+\text{ی}_2}$ ان تفاعلوں کی صدر قیمتوں کی صورت میں درست ہے۔

۲۴۴۔ جملہ $(\text{ا}^{\text{ی}_1})^{\text{ی}_2}$ کا $\text{ا}^{\text{ی}_1\text{ی}_2}$ کی ایک قیمت ہونا ضروری نہیں ہے لیکن $\text{ا}^{\text{ی}_1\text{ی}_2}$ کی ہر قیمت، $(\text{ا}^{\text{ی}_1})^{\text{ی}_2}$ کی ایک قیمت ہے کیونکہ

$$\text{ا}^{\text{ی}_1\text{ی}_2} = \text{ق}(\text{ی}_1\text{ی}_2\,\text{لوک ا}) = \text{ق}\{\text{ی}_1\text{ی}_2(\text{لوک ا} + ۲\,\text{خر ک}\,\pi)\}$$

اور $$(\text{ا}^{\text{ی}_1})^{\text{ی}_2} = \text{ق}\{\text{ی}_2\,\text{لوک ا}^{\text{ی}_1}\} = \text{ق}\{\text{ی}_2(\text{ی}_1\,\text{لوک ا} + ۲\,\text{خر ک}'\,\pi)\}$$

$$= \text{ق}\{\text{ی}_1\text{ی}_2(\text{لوک ا} + ۲\,\text{خر ک}\,\pi) + ۲\,\text{خر} * \text{ک}'\,\pi\,\text{ی}_2\}$$

اسلئے $ا^{ی_۱ی_۲}$ کی قیمتیں، $(ا^{ی_۱})^{ی_۲}$ کی صرف وہ قیمتیں ہیں جو ک = ۰ کی صورت میں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم ہر صورت میں صدر قیمتیں لیں تو مساوات $ا^{ی_۱ی_۲} = (ا^{ی_۱})^{ی_۲}$ درست ہے۔

اگر ہم رموز $ا^{ی}$، $و^{ی}$ کو اُنکی صدر قیمتوں ق (ی لوک ا)، ق (ی) کے مماثل لیں جو بالعموم عمل میں کیا جاتا ہے تو ہم ابھی دکھا چکے ہیں کہ اُن جملوں میں جنمیں یہ رموز واقع ہوتے ہیں اعمال کی تکمیل قوت نماؤں کے معمولی قاعدوں کے مطابق کیجا سکتی ہے جیسا کہ عام طور پر جبرو مقابلہ میں کیا جاتا ہے۔

مثال ۱

اگر ا، ب، ج، د، ... ایک منتظم ن ضلعی کثیر الاضلاع کے راس ہوں جو نصف قطر ا کے دائرہ میں کھینچا گیا ہے جسکا مرکز و ہے تو ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو ا پ، ب پ، ج پ، ... نصف قطر و پ کے ساتھ بناتے ہیں $مس^{-1} \frac{ا^ن جب ن ط}{ا^ن جم ن ط - ر^ن}$ ہے جہاں و پ = ر اور زاویہ ا و پ = ط۔

چونکہ

$$ر^ن - ا^ن و^{ن خ ط} = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ ر - ا و^{خ\left(ط + \frac{۲ س \pi}{ن}\right)} \right\}$$

اسلئے لوکارتم لینے سے

$$لوک \left(ر^ن - ا^ن جم ن ط - خ ا^ن جب ن ط \right)$$

$$= \sum_{س=۰}^{س=ن-۱} لوک \left\{ ر - ۲ ا جم \left(طہ + \frac{۲ س \pi}{ن} \right) - خ ۲ ا جب \left(طہ + \frac{۲ س \pi}{ن} \right) \right\}$$

اور اس مساوات کی طرفین میں خ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$مس^{-۱} \frac{ا^ن جب ن طہ}{ا^ن جم ن طہ - ر^ن} = \sum_{س=۰}^{س=ن-۱} مس^{-۱} \frac{ا جب \left(طہ + \frac{۲ س \pi}{ن} \right)}{ا جم \left(طہ + \frac{۲ س \pi}{ن} \right) - ر}$$

(300) جہاں مقلوب تفاعلوں کی متناظر قیمتیں لیگئی ہیں۔ اِس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ اُن زاویوں کا مجموعہ ہے جو نصف قطر و پ، وتروں اپ، ب پ ... کے ساتھ بناتا ہے، اس لئے یہ مجموعہ ہے

$$مس^{-۱} \frac{ا^ن جب ن طہ}{ا^ن جم ن طہ - ر^ن}$$

کسی اساس پر لوکارثم

۲۴۵ — اگر $ا^ی$ کی صدر قیمت ۶ کے مساوی ہو تو ی کو ۶ کا لوکارثم اساس ا پر کہتے ہیں اور اسکو $لوک_ا ۶$ لکھہ سکتے ہیں۔ اب $ا^ی$ کی صدر قیمت ق (ی $لوک_و ا$) ہے جہاں $لوک_و ا$، ا کا لوکارثم اساس و پر ہے، اور اگر ق (ی $لوک_و ا$) = ۶ تو

$$ی\ لوک_و ا = لوک_و ۶ = لوک_و ۶ + ۲ خ ک \pi$$

اسلئے $لوک_ا ۶ = لوک_و ۶ \backslash لوک_و ا = (لوک_و ۶ + ۲ خ ک \pi) \backslash لوک_و ا$

$لوک_ا ۶$ کی صدر قیمت کو ہم $لوک_و ۶ \backslash لوک_و ا$ لیتے ہیں اور اسکو

لوک ا ء سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس عام قیمت ہے

لوک ا ء = لوک ا ء + ۲ خ رک π \ لوک و ا

جو ایک کثیر القیمت تفاعل ہے جسمیں مختلف قیمتیں بقدر ۲ خ π \ لوک و ا کے ضعفوں کے ایک دوسرے سے فرق رکھتی ہیں۔ مخصوص صورت ا = و میں اوپر کی تعریف، دفعہ ۲۳۸ میں بیان کردہ تعریف کے مطابق ہے کیونکہ اس سے لوک و ء کی عام قیمت کیلئے لوک و ء + ۲ خ رک π حاصل ہوتا ہے۔

عام ترین لوکارتم

۲۴۶ — ہم لوکارتم کی حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں جو دفعہ سابق میں دی ہوئی تعریف کی بہ نسبت زیادہ عام ہے۔

اگر ای کی کوئی قیمت ء کے مساوی ہو تو ی، ء کا لوکارتم اساس ا پر ہے اور لکھا جاسکتا ہے [لوک ا ء] تاکہ لوک ا ء سے جو دفعہ سابق میں استعمال ہوا ہے تمیز ہو جائے۔ ای کی عام ترین قیمت ق (ی لوک و ا) ہے اور اگر یہ قیمت ء کے مساوی ہو تو

ی لوک و ا = لوک و ء، یا ی (لوک و ا + ۲ خ کَ π) = لوک و ء + ۲ خ ک π،

جہاں ک اور کَ صحیح اعداد ہیں۔ پس [لوک ا ء] کی عام قیمت

لوگ و ء \ لوگ و ا، یا (لوگ ء + ۲ خ ر ک π) \ (لوگ ا + ۲ خ ر کَ π)

ہے جو دو طرح سے لا متناہی حد تک کثیر القیمتی ہے۔ اسلئے [لوگ ا ء]
کی قیمتوں میں کَ = ۰ رکھنے سے جو مخصوص جٹ حاصل ہوتا ہے اُسمیں
لوکارتم لوگ ا ء شریک ہیں۔ ہم [لوگ ا ء] کو ء کا عام ترین
لوکارتم اساس ا پر کہہ سکتے ہیں۔

۲۴۷ — اگر ا = و تو [لوگ و ء] = (لوگ ء + ۲ خ ر ک π) \ (۱
+ ۲ خ ر کَ π) جو اساس و پر ء کے عام ترین لوکارتم کے لئے جملہ
ہے۔ زیادہ مقید لوکارتم لوگ و ء کی صورت میں ہم نے ی کی
تعریف یہ کی تھی کہ وہ لوگ و ء کی ایک قیمت ہے جبکہ وی کی صدر
قیمت ء کے مساوی ہو، لیکن عام ترین لوکارتم [لوگ و ء] کی صورت
میں ہم ی کو [لوگ و ء] کی ایک قیمت سمجھتے ہیں جبکہ وی کی
کوئی قیمت ء کے مساوی ہو۔

[لوگ و ا] کی عام ترین قیمت ۲ خ ر ک π \ (۱ + ۲ خ ر کَ π)
ہے اور [لوگ و (-۱)] کی (۲ک + ۱) خ ر π \ (۱ + ۲ خ ر کَ π)۔

جملہ (لوگ و ء + ۲ خ ر ک π) \ (۱ + ۲ خ ر کَ π) پر دوسرے نقطۂ
نگاہ سے بحث کیجا سکتی ہے۔ {ق (۱ + ۲ خ ر کَ π)}^((لوگ ء + ۲ خ ر ک π)/(۱ + ۲ خ ر کَ π)) کی صدر
قیمت مسئلہ (۲) کی رُو سے ق (لوگ ء + ۲ خ ر ک π) ہے جو ء کے
مساوی ہے۔ اس لئے (لوگ ء + ۲ خ ر ک π) \ (۱ + ۲ خ ر کَ π) کو دفعہ ۲۳۸

(301)

کی تعریف کی بموجب ع کا لوکارتم اساس ق (۱+۲ خ ک π) پر سمجھا جاسکتا ہے اور یہ اساس و کی نہیں بلکہ و^(۱+۲ خ ک π) کی صدر قیمت ہے، اسلئے فی الحقیقت ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ [لوک ع]، لوک_(ق(۱+۲ خ ک π)) ع کی قیمتوں کے مساوی ہے جبکہ ک کو مختلف قیمتیں دیجائیں۔ پس ہم اساس و پر عام ترین لوکارتموں کو معمولی لوکارتم اساس و پر نہیں بلکہ اساس و^(۱+۲ خ ک π) پر سمجھ سکتے ہیں جو (بعد الذکر اساس) اگرچہ عدداً و کے مساوی ہے لیکن ک کی مختلف قیمتوں کی بموجب اسکی مختلف دلیلیں ہوتی ہیں۔

۲۴۸ — اس سوال پر اکثر بحث ہوتی رہی ہے کہ آیا ایک منفی حقیقی عدد کا لوکارتم حقیقی ہو سکتا ہے یا نہیں، مثلاً ½ کو −½ و کا لوکارتم سمجھ سکتے ہیں یا نہیں جبکہ یہ امر واقعہ ہے کہ و^½ کی قیمتیں ± √و ہیں؟

اس سوال کا جواب اُس تعریف پر منحصر ہے جو ہم لوکارتم کے لئے اختیار کریں، اگر ہم دفعہ ۲۳۸ کی معمولی تعریف لیں جو یہ ہے کہ ی، ع کا لوکارتم ہے جبکہ و^ی کی صدر قیمت ع کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم نہیں ہو سکتا، لیکن اگر ہم دفعہ ۲۴۶ کی تعریف اختیار کریں جو یہ ہے کہ ی، ع کا لوکارتم ہے جبکہ و^ی کی کوئی قیمت ع کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم ہو سکتا ہے۔ اگر ر ایک مثبت حقیقی عدد ہو تو

[لوک (−ر)] = (لوک ر + (۲ک + ۱) خ π) / (۱ + ۲ ک خ π)

= {لوک ر + ۲ک (۲ک + ۱) π^۲} + خ {(۲ک + ۱) π − ۲ ک π لوک ر} / (۱ + ۴ ک^۲ π^۲)

اور یہ حقیقی ہے اگر لوک ر = (۲ک + ۱) \ ۲کَ ۔ پس اگر ر ہو ایسا کہ
لوک ر کی شکل (۲ک + ۱) \ ۲کَ ہو جہاں ک اور کَ صحیح عدد
ہیں تو [لوک (– ر)] کی ایک قیمت حقیقی ہے۔

اگر لوک ر کی یہ شکل نہ ہو تو ہم ہمیشہ ایک عدد $ر_۱$ معلوم کر سکتے ہیں
ایسا کہ جسمیں اور ر میں اتنا کم فرق ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک (– $ر_۱$)]
کی ایک قیمت حقیقی ہو، کیونکہ ایک کسر $\frac{ف}{ق}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہمیشہ معلوم
ہو سکتی ہے جو لوک ر سے اس قدر کم فرق رکھے جسقدر کہ ہم چاہیں۔ فرض کرو کہ

لوک رَ = $\frac{ف}{ق}$، تب اگر ق جفت ہے تو [لوک (– رَ)] کی ایک قیمت
حقیقی ہے اور رَ = $ر_۱$، لیکن اگر ق طاق ہے تو رَ = $و^{\frac{۲ س ف + ۱}{۲ س ق}} \times و^{-\frac{۱}{۲ س ق}}$

اور $و^{-\frac{۱}{۲ س ق}}$ کو س کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، یا لوک رَ کو $\frac{۲ س ف + ۱}{۲ س ق}$ کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، اسلئے عدد $\frac{۲ س ف + ۱}{۲ س ق}$ = لوک $ر_۱$ معلوم ہو سکتا ہے
جو لوک ر سے اسقدر کم فرق رکھے جسقدر کہ ہم چاہیں اور جو ایسا ہو کہ
[لوک (– $ر_۱$)] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ
اگرچہ ر کی ہر قیمت کے جواب میں [لوک (– ر)] کی ایک قیمت حقیقی
نہیں ہے لیکن ہم ہمیشہ ایک عدد $ر_۱$ معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ $ر_۱$ – ر اتنا
چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک (– $ر_۱$)] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔

لوکارثمی سلسلہ

۲۴۹ — $(۱ + ی)^م$ کی صدر قیمت ق{م $لوک_و$ (۱ + ی)} ہے،

لیکن دفعہ ۲۱۱ کی رو سے $(1+\text{ی})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت سلسلہ

$$1+\text{م}\,\text{ی}+\frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\lfloor 2}\text{ی}^2+\dots+\frac{\text{م}(\text{م}-1)\dots(\text{م}-\text{س}+1)}{\lfloor \text{س}}\text{ی}^{\text{س}}$$

+ ..... کا انتہائی مجموعہ ہے بشرطیکہ یہ سلسلہ مستدق ہو جو ہوگا اگر ی کا مقیاس ایک سے کم ہو، اور نیز اگر یہ مقیاس ایک کے مساوی ہو بشرطیکہ م > ۰۔ یہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر بھی مستدق ہوتا ہے جبکہ ۰ > م > -۱، سوائے نقطہ ی = -۱ کے۔ اب دفعہ ۲۱۰ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ہم اس سلسلہ کو اس کا مجموعہ بدلے بغیر م کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں بشرطیکہ سلسلہ

$$1+|\text{م}||\text{ی}|+\frac{|\text{م}|(|\text{م}|+1)}{\lfloor 2}|\text{ی}|^2+\dots\dots$$

$$+\frac{|\text{م}|(|\text{م}|+1)\dots(|\text{م}|+\text{س}-1)}{\lfloor \text{س}}|\text{ی}|^{\text{س}}+\dots$$

مستدق ہو، اور یہ سلسلہ اسوقت مستدق ہوگا جبکہ $|\text{ی}|<1$۔

اب چونکہ $\text{ق}\{\text{م}\,\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ی})\}$، سلسلہ

$$1+\text{م}\,\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ی})+\frac{\text{م}^2\{\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ی})\}^2}{\lfloor 2}+\dots$$

کا مجموعہ ہے اسلئے ہم ان دو سلسلوں میں م کی قوتوں کے سروں کو دفعہ ۲۰۸ کی رو سے مساوی رکھہ سکتے ہیں، پس

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ی})=\text{ی}-\frac{1}{2}\text{ی}^2+\frac{1}{3}\text{ی}^3-\dots+(-1)^{\text{س}-1}\frac{1}{\text{س}}\text{ی}^{\text{س}}+\dots \quad (9)$$

اس سلسلہ کو جس سے $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱} + \text{ی})$ کی صدر قیمت حاصل ہوتی ہے لوکارثمی سلسلہ کہتے ہیں۔ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ سلسلہ درست ہوتا ہے جبکہ مق ی > ۱، نیز دفعہ ۲۰۷ کی بموجب اس سلسلہ کا مجموعہ $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱} + \text{ی})$ رہتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو جو ہو گا اِلّا آنکہ ی کی دلیل π ہو

۲۴۹ ا — یہ مانکر کہ $|\text{ی}| < \text{۱}$ سلسلہ (۹) سے ظاہر ہے کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی}) = \text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ی}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ی}^{\text{۳}} - \dots + (-\text{۱})^{\text{س}-\text{۱}}\frac{\text{۱}}{\text{س}}\text{ی}^{\text{س}} + \text{ج}_{\text{س}}$$

جہاں $\text{ج}_{\text{س}}$، مستدق سلسلہ $\frac{|\text{ی}|^{\text{س}+\text{۱}}}{\text{س}+\text{۱}} + \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+\text{۲}}}{\text{س}+\text{۲}} + \dots$ کے مجموعے سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور اسلئے

$$|\text{ج}_{\text{س}}| < \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+\text{۱}}}{\text{س}+\text{۱}}(\text{۱}+|\text{ی}|+|\text{ی}|^{\text{۲}}+\dots)$$

یا

$$|\text{ج}_{\text{س}}| < \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+\text{۱}}}{\text{س}+\text{۱}} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۱}-|\text{ی}|}$$

(303)

پس یہ ثابت ہو چکا کہ جب $|\text{ی}| < \text{۱}$ تو

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی}) = \text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ی}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ی}^{\text{۳}} - \dots + \frac{(-\text{۱})^{\text{س}-\text{۱}}}{\text{س}}\text{ی}^{\text{س}}(\text{۱}+\text{و}_{\text{س}})$$

جہاں $|\text{و}_{\text{س}}| < \frac{\text{س}}{\text{س}+\text{۱}} \cdot \frac{|\text{ی}|}{\text{۱}-|\text{ی}|}$، اور اسلئے $|\text{و}_{\text{س}}|$، $|\text{ی}|$ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

بالخصوص س = ۱ لینے سے $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی}) = \text{ی}(\text{۱}+\text{و}_{\text{۱}})$ جہاں $|\text{و}_{\text{۱}}| < \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \cdot \frac{|\text{ی}|}{\text{۱}-|\text{ی}|}$

اور اس طرح $|\text{و}_{\text{۱}}|$، $|\text{ی}|$ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو

شکل

$$\text{نہا}_{|ی|=۰} \frac{\text{لوک}_و(۱+ی) - ی}{ی} = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اگر م، |ی| سے بڑا کوئی مثبت حقیقی عدد ہو تو $(۱ + \frac{ی}{م})^م = و^{م\,\text{لوک}_و(۱+ی\backslash م)} = و^{ی(۱+ط)}$ جہاں ط، |ی\م| کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس اگر م کو غیر معین طور پر بڑھنے والے مثبت حقیقی عددوں کے کسی تواتر کی قیمتیں دی جائیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $(۱ + \frac{ی}{م})^م$ کی انتہا $و^ی$ ہے۔ یہ مسئلہ دفعہ ۲۲۶ میں صرف اُس مخصوص صورت کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے جسمیں اعداد م پر مثبت صحیح اعداد ہونیکی قید تھی۔ یہ قید اب اُٹھ چکی ہے۔

۲۵۰ — ی = ر (جم ط + خ جب ط) لکھنے سے

$$\text{لوک}_و(۱+ی) = \text{لوک}_و(۱ + ر\,\text{جم}\,ط + خ\,ر\,\text{جب}\,ط)$$

اور یہ جملہ ذیل کے مساوی ہے

$$\frac{۱}{۲}\text{لوک}_و(۱ + ۲\,ر\,\text{جم}\,ط + ر^۲) + خ\,\text{مس}^{-۱}\{ر\,\text{جب}\,ط \backslash (۱ + ر\,\text{جم}\,ط)\}$$

جہاں مقلوب مماس اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔ پس ہمیں حسب ذیل دو سلسلے ملتے ہیں

$\frac{1}{2}$ لوک$_و$ (۱ + ۲ ر جم طہ + ر^2) = ر جم طہ − $\frac{1}{2}$ ر^2 جم ۲ طہ + $\frac{1}{3}$ ر^3 جم ۳ طہ − .... (۱۰)

مس$^{-1}$ {ر جیب طہ \ (۱ + ر جم طہ)} = ر جیب طہ − $\frac{1}{2}$ ر^2 جیب ۲ طہ + $\frac{1}{3}$ ر^3 جیب ۳ طہ − .... (۱۱)

جہاں ر < ۱ ' یا ر = ۱ اور طہ ≠ ± π

اگر ر = ۱ رکھا جائے تو

لوک$_و$ (۲ جم $\frac{1}{2}$ طہ) = جم طہ − $\frac{1}{2}$ جم ۲ طہ + $\frac{1}{3}$ جم ۳ طہ − .... (۱۲)

$\frac{1}{2}$ طہ = جیب طہ − $\frac{1}{2}$ جیب ۲ طہ + $\frac{1}{3}$ جیب ۳ طہ − .... (۱۳)

جہاں طہ ' ± π کے درمیان واقع ہے اور ± π کے مساوی نہیں ہے
اگر (۱۱) میں طہ کو ۲ طہ میں تبدیل کیا جائے تو مسئلہ ذیل حاصل ہوتا ہے

لوک جم طہ = − لوک ۲ + جم ۲ طہ − $\frac{1}{2}$ جم ۴ طہ + $\frac{1}{3}$ جم ۶ طہ − ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ ' ± $\frac{1}{2}$ π کے درمیان واقع ہو۔

پھر طہ کو $\frac{1}{2}$ π − طہ میں تبدیل کرنے سے

لوک جیب طہ = − لوک ۲ − جم ۲ طہ − $\frac{1}{2}$ جم ۴ طہ − $\frac{1}{3}$ جم ۶ طہ − ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ ' صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔

سلسلہ (۱۳) سے غیر تسلسل کی ایک مثال فراہم ہوتی ہے اس وجہ سے کہ یہ سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے جبکہ طہ قیمت π کے قریب آتا ہے ' جب ' طہ = π تو اس سلسلہ کا مجموعہ صفر ہوتا ہے

(304)

لیکن جب ' طہ ' π سے خواہ کتنی ہی صغیر مقدار کے کم ہو اس سلسلہ کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ طہ ہوتا ہے۔

گریگوری کا سلسلہ

۲۵۱ — چونکہ لوک$_{و}$ (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ جہاں طہ ' ± π کے درمیان واقع ہے اسلئے

لوک$_{و}$ جم طہ + لوک$_{و}$ (۱ + خ مس طہ) = خ طہ

یا　لوک$_{و}$ جم طہ + خ (مس طہ − $\frac{1}{3}$ مس^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ مس^{5} طہ ...)

+ ($\frac{1}{2}$ مس^{2} طہ − $\frac{1}{4}$ مس^{4} طہ + ...) = خ طہ

بشرطیکہ مس طہ ' ± ۱ کے درمیان واقع ہو جو ہوگا اگر طہ ' ± $\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہو یا ± $\frac{1}{4}$ π کے مساوی ہو۔ پس چونکہ جم طہ مثبت ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک$_{و}$ جم طہ = − $\frac{1}{2}$ مس^{2} طہ + $\frac{1}{4}$ مس^{4} طہ − ....

اور　طہ = مس طہ − $\frac{1}{3}$ مس^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ مس^{5} طہ − ...، ... (۱۴)

اس آخری سلسلے کو گریگوری کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ درست رہتا ہے اگر طہ ' ± $\frac{1}{4}$ π کے درمیان (بشمول ہر دو حدود) واقع ہو۔

اب طہ کو $\frac{1}{2}$ π − طہ میں بدلنے سے

$\frac{1}{2}$ π − طہ = مم طہ − $\frac{1}{3}$ مم^{3} طہ + $\frac{1}{5}$ مم^{5} طہ − ....

جو درست رہتا ہے اگر طہ ، $\frac{۱}{۴}$ π اور $\frac{۳}{۴}$ π کے درمیان واقع ہو۔ کسی زاویہ طہ کے لئے عام جملے ہیں

$$\text{طہ} = \text{ن}\,\pi + \text{مس طہ} - \frac{۱}{۳}\,\text{مس}^{۳}\text{طہ} + \ldots$$

یا
$$\text{طہ} = (\text{ن} + \tfrac{۱}{۲})\,\pi - \text{مم طہ} + \frac{۱}{۳}\,\text{مم}^{۳}\,\text{طہ} - \ldots$$

جہاں سلسلہ اول میں ن ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ ـ ن π ، $\pm \frac{۱}{۴}$ π کے درمیان واقع ہے اور سلسلہ دوم میں ن ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ ـ ن π ، $\frac{۱}{۴}$ π اور $\frac{۳}{۴}$ π کے درمیان واقع ہے۔

گریگوری کے سلسلے کو شکل

$$\text{مس}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{۱}{۳}\,\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۵}\,\text{لا}^{۵} - \ldots$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں لا ، ± ۱ کے درمیان واقع ہے اور مس$^{-۱}$ لا اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔

لا کی قوتوں میں جب$^{-۱}$ لا کے لئے جو سلسلہ دفعہ ۲۱۸ میں حاصل کیا جا چکا ہے اسکو گریگوری کے سلسلے سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو طہ = جب$^{-۱}$ لا تو

$$\text{جب}^{-۱}\,\text{لا} = \frac{\text{لا}}{(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{۱}{۳}\,\frac{\text{لا}^{۳}}{(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{۱}{۵}\,\frac{\text{لا}^{۵}}{(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۵}{۲}}} - \ldots$$

$$+ (-۱)^{\text{ر}}\,\frac{۱}{۲\text{ر}+۱}\,\frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}(۲\text{ر}+۱)}} + \ldots$$

(305) اگر لا ایک سے کم ہو تو وہ سلسلہ جو

$$\frac{1}{2ر+1}\;\frac{لا^{2ر+1}}{(1-لا^2)^{\frac{1}{2}(2ر+1)}}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے مطلقاً مستدق ہے اور سلسلہ

$$\frac{|لا|}{(1-لا^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}\,\frac{|لا|^3}{(1-لا^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5}\,\frac{|لا|^5}{(1-لا^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots\dots$$

مستدق ہے اگر $|لا| < \frac{1}{\sqrt{2}}$؛ اسلئے ہم اس سلسلہ کو لا کی قوتوں میں ترتیب دیسکتے ہیں۔ چنانچہ $(-1)^{ر}\, لا^{2ر+1}$ کے سر کے لئے جملہ ملتا ہے

$$\frac{1}{2ر+1}\left\{1-\frac{2ر+1}{2}+\frac{(2ر+1)(2ر-1)}{2\times4}-\dots+(-1)^{ر}\frac{(2ر+1)(2ر-1)\dots\times1}{2\times4\times6\dots2ر}\right\}$$

خطوط وحدانی { } کے اندر کا جملہ $(1-ما)^{\frac{1}{2}(2ر+1)}$ کے پھیلاؤ (ما کی قوتوں میں) میں پہلے ر + 1 سروں کا مجموعہ ہے اور یہ مجموعہ $(1-ما)^{-1}(1-ما)^{\frac{1}{2}(2ر+1)}$ یا $(1-ما)^{\frac{1}{2}(2ر-1)}$ میں $ما^{ر}$ کے سر کے مساوی ہے اور یہ سر

$$(-1)^{ر}\,\frac{(2ر-1)(2ر-3)\dots\times1}{2\times4\times6\times\dots\times2ر}$$

کے مساوی ہے۔ پس جب$^{-1}$ لا کے پھیلاؤ میں $لا^{2ر+1}$ کا سر ہے

$$\frac{1}{2ر+1}\;\frac{1\times3\times5\times\dots(2ر-1)}{2\times4\times6\times\dots\times2ر}$$

اسلئے

$$جب^{-1}لا = لا+\frac{1}{2}\times\frac{لا^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\,\frac{لا^5}{5}+\dots+\frac{1\times3\times5\dots(2ر-1)}{2\times4\times6\dots2ر}\;\frac{لا^{2ر+1}}{2ر+1}+\dots$$

اس ثبوت سے صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے درست ہے لیکن اِس واقعہ کو استعمال کرنے سے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ اسکے استدقاق کے دائرہ میں مسلسل ہے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ یہ سلسلہ درست رہتا ہے اگر لا، ± 1 کے درمیان ہو۔

دائرہ کی تربیع

521 (ا) — وہ مشہور مسئلہ جو دائرہ کو مربع میں تحویل (Squaring the cirele) کرنیکا ہے یعنی ایک مربع بنانیکا جس کا رقبہ ایک دئے ہوئے دائرہ کے مساوی ہو اِس مسئلہ کے مماثل ہے کہ ایک خط مستقیم بنایا جائے جو طول میں ایک دئے ہوئے دائرہ کے محیط کے مساوی ہو۔ وہ طریقہ عمل جو اس مسئلہ عملی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے اقلیدسی ہے جسمیں صرف دائروں اور خطوطِ مستقیم کو اقلیدسی نظام کے اصولِ موضوعہ کی بموجب کھینچنے کا عمل شامل ہے۔

اس مسئلہ عملی کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ وہ ایک خط مستقیم کو جسکا طول عدد π سے تعبیر ہوتا ہے بنانیکا مسئلہ ہے جبکہ ایک دئے ہوئے محدود خط کا طول طول کی اکائی متصور ہو۔ لیمبرٹ نے یہ بات ثابت کی کہ عدد π غیر منطق ہے یعنی اسکو شکل $\frac{ف}{ق}$ میں بیان نہیں کیا جا سکتا جہاں ف اور ق صحیح عدد ہیں اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں لیکن یہ امر واقعہ اس بات کو ثابت کرنیکے لئے کافی نہیں ہے کہ طول π کا خط مستقیم بنانا ناممکن ہے کیونکہ غیر منطق طول کے خطوط مستقیم کی ایک خاص جماعت اقلیدسی طریقہ عمل سے حاصل کیجا سکتی ہے۔ اس سلسلہ میں بنیادی اہمیت رکھنے والی ایک کڑی کا

اضافہ ہوا جبکہ لیویل (Liouville)[۱] نے علوی اعداد کے وجود کو ثابت
کیا جو جبری اعداد سے مختلف ہیں۔ جبری عدد وہ ہے جو کسی
درجہ ن کی ایک جبری مساوات کی ایک اصل ہوتا ہے جبکہ اس مساوات
کے سر منطق عدد ہوں، مسئلہ کی عمومیت پر اثر نہیں پڑتا اگر ان
سروں پر مثبت یا منفی صحیح عدد ہونیکی قید عائد کیجائے۔ علوی عدد
وہ ہے جو کسی ایسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جس کے سر
منطق (یا صحیح عدد) ہوں۔ خود لیویل نے علوی عددوں کی مثالیں
دی ہیں لیکن وہ پہلی صورت جس میں ایک عدد کو جو علم التحلیل میں
بہت معروف ہے علوی ثابت کیا گیا تھا عدد و کی تھی جس کی علویت
ہرمائٹ (Hermite) نے قائم کی۔ ہرمائٹ کے بعد لنڈی میان
(Lindemann)[۲] نے اس امر کا ثبوت دیا کہ π ایک
علوی عدد ہے۔ اُس نے یہ عام تر مسئلہ ثابت کیا کہ اگر $و^{لا} = ما$ تو
یہ دو عدد لا اور ما دونوں جبری نہیں ہو سکتے اِلّا بصورت آنکہ لا = ۰،
ما = ۱۔ وہ آسان ثبوت کہ و اور π علوی عدد ہیں بعد میں ہلبرٹ،
ہرورز (Hurwitz) اور گارڈن (Gordan) نے دئے[۳]۔
گارڈن کے ثبوت کی ترمیم شدہ شکل یہاں دی جائے گی۔

یہ ثبوت کہ π ایک علوی عدد ہے اس امر کے مماثل ہے
کہ کسی ہندسی عمل کے ذریعہ جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائرے
استعمال کئے گئے ہوں دائرہ کو ایک مربع میں تحویل کرنا ناممکن ہے،
یا زیادہ عام صورت میں یہ کہ کسی جبری منحنیوں کے ذریعہ ایسا کرنا
ناممکن ہے۔ کیونکہ کسی ایسے عمل کے یہ معنی ہیں کہ π کو کسی خاص

---

[۱] Liouville's journal vol. xvi. 1851

[۲] Mathematische Annalen, vol. xx.1882.

[۳] „ „ vol.xliii, 1893

جبری مساوات کی ایک اصل کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے جہاں یہ مساوات خطوط مستقیم اور دائروں یا دوسرے جبری تخنیوں کی کارٹیزی مساواتوں کو ترکیب دینے سے حاصل ہوئی ہے۔ دائرہ کو مربع میں تحلیل کرنیکا مسئلہ ایسا ہے کہ جس نے صدیوں تک علماء ریاضی کے دماغوں کو محو فریب رکھا اور اسلئے لنڈرمن کا ثبوت اس مسئلہ کے عدم امکان کے متعلق اس لحاظ سے بڑی اہمیت رکھتا ہے کہ وہ تاریخی دلچسپی کے ایک مسئلہ سے متعلق ہے۔

۲۵۱ (ب) ۔ یہ دکھانے کے لئے کہ عدد و علوی ہے مان لو (بفرض امکان) کہ وہ اس شرط

$$\text{ا} + \text{ا}_1 \text{و} + \text{ا}_2 \text{و}^2 + \ldots + \text{ا}_\text{ن} \text{و}^\text{ن} = 0$$

(307)

کو پورا کرتا ہے جہاں ا، ا_1، ... مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں اور ا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ اب یہ دکھانے کے لئے کہ اس مفروضہ سے ہم اس مسئلہ کے ضد پر پہنچتے ہیں یہ ثابت کیا جائیگا کہ ایک عدد ک متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ

$$\text{ک}\,\text{ا} = \text{ص} + \text{ف}،\ \text{ک}\,\text{ا}_1 \text{و} = \text{ص}_1 + \text{ف}_1،\ \text{ک}\,\text{ا}_2 \text{و}^2 = \text{ص}_2 + \text{ف}_2،$$

$$\ldots،\ \text{ک}\,\text{ا}_\text{ن} \text{و}^\text{ن} = \text{ص}_\text{ن} + \text{ف}_\text{ن}$$

جہاں ص، ص_1، ص_2، ... مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور ف_1، ف_2، .... $\text{ف}_\text{ن}$ ان عددوں کو تعبیر کرتے ہیں جو عدداً ایک سے کم ہیں اور یہ کہ $\text{ف}_1 + \text{ف}_2 + \ldots + \text{ف}_\text{ن}$ عدداً ایک سے کم ہے نیز $\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \ldots + \text{ص}_\text{ن}$ صفر نہیں ہے

ابتدائی مساوات کو ک سے ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک صحیح عدد اور عدد ۱ ایک سے چھوٹے عدد کا مجموعہ صفر کے مساوی حاصل ہوتا ہے جو ناممکن ہے۔ ک کی تعیین کے لئے جملہ

$$\text{فہ}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{پ}-1}}{|\underline{\text{پ}-1}}\left\{(1-\text{لا})(2-\text{لا})\cdots(\text{ن}-\text{لا})\right\}^{\text{پ}}$$

پر غور کرو جہاں پ، ن سے بڑا اور ۱ سے بڑا ایک مفرد عدد ہے۔ ہم فہ (لا) کو اسے لا کی قوتوں میں پھیلانے کے بعد $\text{ج}_{\text{پ}-1}\,\text{لا}^{\text{پ}-1} + \text{ج}_{\text{پ}}\,\text{لا}^{\text{پ}} + \cdots \text{ج}_{\text{ن پ}+\text{پ}-1}\,\text{لا}^{\text{ن پ}+\text{پ}-1}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب فہ (لا) کے متواتر مشتق تفاعلوں کو

$$\text{فہ}'(\text{لا}),\ \text{فہ}''(\text{لا}),\ \ldots,\ \text{فہ}^{(\text{س})}(\text{لا}),\ \ldots,\ \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-1)}(\text{لا})$$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{فہ}^{(\text{پ})}(0),\ \text{فہ}^{(\text{پ}+1)}(0),\ \ldots,\ \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-1)}(0)$$

سب کے سب پ کے ضعف ہیں، لیکن $\text{فہ}^{(\text{پ}-1)}(0)$، پ کا ضعف نہیں ہے کیونکہ $(|\underline{\text{ن}})^{\text{پ}}$، پ کے لحاظ سے مفرد ہے۔ نیز اگر صحیح عددوں ۱، ۲، ۳، ...، ن میں سے ایک م سے تعبیر ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{فہ}(\text{م}),\ \text{فہ}'(\text{م}),\ \ldots,\ \text{فہ}^{(\text{پ}-1)}(\text{م})$ سب کے سب معدوم ہوتے ہیں اور $\text{فہ}^{(\text{پ})}(\text{م}),\ \text{فہ}^{(\text{پ}+1)}(\text{م}),\ \ldots,\ \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-1)}(\text{م})$ سب کے سب

پ سے تقسیم پذیر صحیح عدد ہیں -

فرض کرو کہ $ک_پ$ سے

$$\sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} \frac{۱}{\lfloor ر} \times ج_ر$$

یا $فہ^{(پ-۱)}(۰) + فہ^{(پ)}(۰) + \ldots + فہ^{(ن پ+پ-۱)}(۰)$

تعبیر ہوتا ہے، اِس طرح $ک_پ$، پ کا ضِعف نہیں ہے کیونکہ $فہ^{(پ-۱)}(۰)$، پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ $ک_پ$ کی وہ قیمت جو مفرد عدد پ کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں ہے مطلوبہ عدد ک ہے۔

چونکہ ا، پ کے لحاظ سے مفرد ہے اسلئے $ک_پ$ ا، پ کا ضِعف نہیں ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ک_پ\, ا^م و^ا = ا^م \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} \frac{۱}{\lfloor ر} \times ج_ر\, و^م$$

$$= ا^م \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} ج_ر \left\{ م^ر + ر م^{ر-۱} + ر(ر-۱) م^{ر-۲} + \ldots + \lfloor ر + \frac{م^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{م^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \ldots \right\}$$

اب چونکہ $\frac{م^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{م^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ (308)

$$م^ر \left\{ ۱ + م + \frac{م^۲}{\lfloor ۲} + \ldots \right\}$$

کے انتہائی مجموعہ سے یا $\acute{م}\ \acute{و}$ سے کم ہے اس لئے اس انتہائی مجموعہ کو $\acute{م}$ طہ$_ر$ $\acute{و}$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جہاں $0 <$ طہ$_ر < 1$۔
اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ک_پ\ \underline{|م}\ \acute{و} = \underline{|م} \{ فہ(م) + فہ'(م) + \ldots + فہ^{(ن پ + پ - 1)}(م) \}$$

$$+ \underline{|م}\ \acute{و} \sum_{ر = پ - 1}^{ر = ن پ + پ - 1} ا ج_ر طہ_ر \acute{م}$$

بائیں جانب کی پہلی رقم ایک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور دوسری رقم عدداً

$$< |\underline{|م}|\ \acute{و} \sum_{ر = پ - 1}^{ر = ن پ + پ - 1} |ج_ر|\ \acute{م}$$

یا

$$< |\underline{|م}|\ \acute{و}\ \frac{م^{پ - 1}}{\underline{|پ - 1}} \{(1+م)(2+م)\ldots(ن+م)\}^{پ}$$

جو

$$\not< |\underline{|م}|\ \acute{و}\ \frac{ن^{پ - 1}}{\underline{|پ - 1}} \{(1+ن)(2+ن)\ldots(ن+ن)\}^{پ}$$

اب پ کو کافی بڑا لینے سے عدد

$$\{ن(ن+1)(ن+2)\ldots(ن+ن)\}^{پ} \Big\backslash \underline{|پ - 1}$$

اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ فرض کرو کہ ک، $ک_پ$ کی وہ قیمت ہے جبکہ پ اسقدر بڑا ہے کہ

$$\frac{ن^{پ-1}}{\lfloor پ-1} \left\{ (1+ن)(2+ن)\ldots(ن+ن) \right\}^{پ} \left\{ ا_{1}ا و + ا_{2}ا و^{2} + \ldots + ا_{ن}ا و^{ن} \right\}$$

ایک سے کم ہے۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ک $(ا_{.} + ا_{1}و + ا_{2}و^{2} + \ldots + ا_{ن}و^{ن})$ تین عددوں کا مجموعہ ہے جنمیں سے ایک، ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے اور دوسرا ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور تیسرا ایک عدد ہے جو ایک سے کم ہے اور یہ ناممکن ہے۔ پس چونکہ و مساوات

$$ا_{.} + ا_{1}لا + ا_{2}لا^{2} + \ldots + ا_{ن}لا^{ن} = .$$

کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر منطق ہیں اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

۲۵۱ (ج)۔ اگر π بفرض امکان ایک جبری مساوات کی اصل ہو جسکے سر منطق ہیں تو خ π بھی ایسی مساوات کی اصل ہو گا۔ مان لو کہ خ π، مساوات

$$ج (لا - عہ_{1})(لا - عہ_{2})\ldots(لا - عہ_{س}) = .$$

کی ایک اصل ہے جسکے سر منطق ہیں، اس طرح عددوں عہ$_{1}$، عہ$_{2}$، ...، عہ$_{س}$ میں سے ایک عدد خ π ہے۔

چونکہ $و^{خ π} = -1$، اسلئے $(1 + و^{عہ_{1}})(1 + و^{عہ_{2}})\ldots(1 + و^{عہ_{س}}) = .$

اب اجزائے ضربی کو باہم ضرب دے لینے کے بعد اسکی شکل ہے

$$1 + و^{ب_{1}} + و^{ب_{2}} + \ldots + و^{ب_{ن}} = .$$

(309)

جہاں ا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ $\text{ج}\,\text{ع}_1$، $\text{ج}\,\text{ع}_2$، ... $\text{ج}\,\text{ع}_\text{ن}$ کے تمام متشاکل تفاعل صحیح عدد ہیں اسلئے $\text{ج}\,\text{ب}_1$، $\text{ج}\,\text{ب}_2$ ... کے تمام متشاکل تفاعل بھی صحیح عدد ہیں۔ ہم لیتے ہیں

$$\text{فہ}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{پ}-1}}{\lfloor \text{پ}-1} \text{ج}^{\text{ن پ}+\text{پ}-1} \{(\text{لا}-\text{ب}_1)(\text{لا}-\text{ب}_2)\cdots(\text{لا}-\text{ب}_\text{ن})\}^{\text{پ}}$$

جہاں پ ایک مفرد عدد ہے جو ا، ن، ج، $\text{ج}^\text{ن}\,|\text{ب}_1\text{ب}_2\cdots\text{ب}_\text{ن}|$ سب سے بڑا ہے۔

اب $\text{فہ}(\text{لا})$ کو $\text{ج}_{\text{پ}-1}\,\text{لا}^{\text{پ}-1} + \text{ج}_\text{پ}\,\text{لا}^\text{پ} + \cdots + \text{ج}_{\text{ن پ}+\text{پ}-1}\,\text{لا}^{\text{ن پ}+\text{پ}-1}$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{فہ}^{(\text{پ})}(0)$، $\text{فہ}^{(\text{پ}+1)}(0)$، ... $\text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-1)}(0)$

سب کے سب پ کے صحیح عددی ضعف ہیں اور $\text{فہ}^{(\text{پ}-1)}(0)$، پ کا ضعف نہیں ہے۔ نیز اگر $\text{م} \leq \text{ن}$ تو $\text{فہ}(\text{ب}_\text{م})$، $\text{فہ}'(\text{ب}_\text{م})$، ... $\text{فہ}^{(\text{پ}-1)}(\text{ب}_\text{م})$

سب کے سب صفر ہیں اور $\sum_{\text{م}=1}^{\text{م}=\text{ن}} \text{فہ}^{(\text{پ})}(\text{ب}_\text{م})$، $\sum_{\text{م}=1}^{\text{م}=\text{ن}} \text{فہ}^{(\text{پ}+1)}(\text{ب}_\text{م})$، ...

...، $\sum_{\text{م}=1}^{\text{م}=\text{ن}} \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-1)}(\text{ب}_\text{م})$ سب کے سب صحیح عدد ہیں

جو پ سے تقسیم پذیر ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\text{ک}_\text{پ} = \sum_{\text{ر}=\text{پ}-1}^{\text{ر}=\text{ن پ}+\text{پ}-1} \lfloor \text{ر} \times \text{ج}_\text{ر} = \text{فہ}^{(\text{پ}-1)}(0) + \text{فہ}^{(\text{پ})}(0) + \cdots + \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-1)}(0)$$

اِس طرح کہ پ ! ، پ کا ضعف نہیں ہے۔

$$\text{نیز کہ } پ!\; و^{بم} = \sum_{ر=پ-1}^{ر=ن پ+پ-1} ج_ر \left\{ بم^{ر} + ر\, بم^{ر-1} + \cdots + !ر + \frac{بم^{ر+1}}{ر+1} \right.$$

$$\left. + \frac{بم^{ر+2}}{(ر+1)(ر+2)} + \cdots \right\}$$

$$= فہ(بم) + فہ'(بم) + \cdots + فہ^{(ن پ+پ-1)}(بم)$$

$$+ و^{|بم|} \sum_{ر=پ-1}^{ر=ن پ+پ-1} ج_ر\, طہ_ر\, |بم|^{ر}$$

جہاں اعداد |طہ_ر| سب کے سب صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔

$$\text{عدد} \left| \sum_{ر=پ-1}^{ر=ن پ+پ-1} ج_ر\, طہ_ر\, |بم|^{ر} \right|$$

$$\text{عدداً} < \sum_{ر=پ-1}^{ر=ن پ+پ-1} |ج_ر|\, |بم|^{ر}$$

$$\text{یا} < \frac{ب^{پ-1}}{\lfloor پ-1} ج^{ن پ+پ-1} \left\{ (ب+|بم_1|)(ب+|بم_2|)\cdots(ب+|بم_ن|) \right\}^{پ}$$

جہاں ب، عددوں |بم$_1$|، |بم$_2$|، ...، |بم$_ن$| میں سے سب سے بڑا ہے۔

اب ہم پ کو اتنا بڑا لیتے ہیں کہ

$$\left\{ فو^{ا ع_1} + فو^{ا ع_2} + \ldots + فو^{ا ع_ن} \right\} \frac{ع^{پ-1}}{\boxed{پ-1}} ج^{ن پ + پ - 1} \left\{ (ع + ا ع_1)(ع + ا ع_2) \ldots \right\}^{پ}$$

$$< 1$$

فرض کرو کہ پ کی اس قیمت کے جواب میں $ک_پ$ کی قیمت ک ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ک $(1 + فو^{ع_1} + فو^{ع_2} + \ldots + فو^{ع_ن})$ تین عددوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جنمیں سے ایک 'پ کا ضعف ہے' دوسرا ایک صحیح عدد ہے پ سے ناتقسیم پذیر' اور تیسرا ایک عدد ہے ایک سے کم' اس لئے یہ ناممکن ہے کہ مجموعہ معدوم ہو سکے۔ پس یہ ثابت ہو چکا کہ π کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر صحیح عدد ہوں اور اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

(310)

دائرہ کی تقریبی تربیع

۲۵۲ — دائرہ کی تربیع کا مسئلہ جو π کی قیمت متعین کرنیکے مماثل ہے تقریب کے کسی مطلوبہ درجہ تک حل ہو سکتا ہے اگر ان متعدد سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ میں رقموں کی کافی تعداد لیجائے جو π کے لئے حاصل کئے جا چکے ہیں۔ سادہ ترین سلسلہ جو حاصل ہو سکتا ہے گریگوری کے سلسلہ میں $ط = \frac{1}{4}\pi$ رکھنے سے ملتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

لیکن یہ سلسلہ اسقدر سست رفتار سے متدق ہوتا ہے کہ π کو محسوب کرنیکے لئے اسکا کوئی عملی فائدہ نہیں۔

۲۵۳ ـ اگر ہم تماثلہ $\frac{1}{4}\pi = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ استعمال کریں اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ ، $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ کی بجائے انکی قیمتیں گریگوری کے سلسلہ سے لیکر درج کریں تو

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots\cdots$$

اس کو یولر کا سلسلہ کہتے ہیں۔

اسی تماثلہ سے ایک دوسرا سلسلہ حاصل ہو سکتا ہے اگر $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ کی بجائے اُن کی قیمتیں سلسلہ ذیل سے جو دفعہ ۲۱۹ میں حاصل کیا گیا تھا لیکر رکھی جائیں

$$\text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{\text{لا}}{1+\text{لا}^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2} + \frac{2\times4}{3\times5}\left(\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}\right)^2 + \cdots\right\}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{4}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{2}{10} + \frac{2\times4}{3\times5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

$$+ \frac{3}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{10} + \frac{2\times4}{3\times5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

۲۵۴ ـ دوسرے سلسلے جو اسی طرح حاصل ہوئے ہیں مختلف محاسبوں نے استعمال کئے ہیں ـ کلاسن (Clausen)[1] نے اپنا سلسلہ تماثلہ $\frac{1}{4}\pi = 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}\ \text{مس}^{-1}\frac{1}{7}$ سے گریگوری کا سلسلہ استعمال کرکے حاصل کیا۔ میچن (Machin) کا سلسلہ، ضابطہ

---

[1] دیکھو مضمون On the call. of π" by E. Frisby in the Messenger of Math. vol. II

$$\frac{1}{4}\pi = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

سے حاصل ہوا ہے۔ ڈیس (Dase) نے متماثلہ

$$\frac{1}{4}\pi = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{5} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{8}$$

استعمال کی۔ میچن کے سلسلہ کی ایک آسان تر شکل روتھرفورڈ (Rutherford) نے لی تھی جس نے متماثلہ $\frac{1}{4}\pi = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{70} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{99}$ استعمال کی۔ ہٹن (Hutton)[1] نے یہ سلسلہ

$$\pi = 2.4\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{10} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\,\frac{1}{10^2} + \cdots\right\}$$
$$+\ .56\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{2}{100} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \cdots\right\}$$

دیا جو لا مس$^{-1}$ لا کو $\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}$ کی قوتوں میں پھیلا کر اس پھیلاؤ میں لا $= \frac{1}{3}$ اور لا $= \frac{1}{7}$ رکھنے اور کلاسن کی متماثلہ استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

یولر نے یہ سلسلہ

$$\pi = \frac{28}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \cdots\right\}$$
$$+\ \frac{30336}{100000}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\right\}$$

---

[1] Phil. Trans. 1776

دیا ہے جو متماثلہ

$$\pi = ۲۰ \text{ مس}^{-۱} \frac{۱}{۲} + ۸ \text{ مس}^{-۱} \frac{۳}{۷۹}$$

سے اخذ ہو سکتا ہے۔

ڈبلیو شہانکس (W. Shanks) نے π کی قیمت اعشاریہ کے ۷۰۷ مقامات تک محسوب کی ہے[۱]

لارڈ براونکر (Lord Brouncker) رائل سوسائٹی کے پہلے صدر نے ۱۶۵۸ء میں مسلسل کسر $\frac{۱}{۴}\pi = \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱^۲}{+۲}\ \frac{۳^۲}{+۲}\ \frac{۵^۲}{+۲} \ldots$ دی تھی۔

یہ کسر معمولی قاعدے سے گریگوری کے سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \ldots$ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوئی ہے۔ سٹرن[۲] (Stern) نے مسلسل کسر

$$\frac{۱}{۲}\pi = ۱ + \frac{۱}{+۱}\ \frac{۲ \times ۱}{+۱}\ \frac{۳ \times ۲}{+۱}\ \frac{۴ \times ۳}{+۱} \ldots\ldots$$ دی ہے۔

دائرہ کی تربیع کے مضمون کی تاریخ کا ایک دلچسپ تذکرہ انسائیکلوپیڈیا بریٹانیکا اشاعت نہم میں مقالہ "Squaring of the circle" میں ملیگا۔ نیز دیکھو گلیشیر کا مقالہ "On the quadrature of the circle 1580-1630" میسنجر آف میتھمائیکس جلد سوم میں۔

مثلثی متماثلات

۲۵۵ ۔ دفعہ ۱۹ مثال (۵) کی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مقادیر ا، ب، ج، .... کی کسی تعداد کے درمیان کسی متماثل جبری رشتہ ف (ا، ب، ج، ....) = ۰ سے دو متناظر مثلثی متماثلات اخذ ہو سکتی ہیں

---

[۱] دیکھو Proc. Royal Soc. vols. xxi. xxii

[۲] Crelle's Journal, vol. x - نیز دیکھو سلوسٹر کا نوٹ Phil. Mag. سنہ ۱۸۶۹ میں

(312) یہ اس طرح حاصل ہونگی کہ ا، ب، ج، .... کو ملتف قیمتیں

جم عہ + خر جب عہ، جم بہ + خر جب بہ، جم جہ + خر جب جہ، ....

دیجائیں اور محصلہ متماثلہ کو شکل

فہ (عہ، بہ، جہ، ....) + خر پہ (عہ، بہ، جہ، ....) = ۰

میں تحویل کیا جائے تو مثلثی متماثلات

فہ (عہ، بہ، جہ، ....) = ۰، پہ (عہ، بہ، جہ، ....) = ۰

حاصل ہونگی جنمیں عہ، بہ، جہ، .... کی جیوب اور جیوب التمام شامل ہونگی۔ تحویل کا کام بالعموم مختصر ہو سکتا ہے اگر جم عہ + خر جب عہ،

جم بہ + خر جب بہ، .... کی بجائے رمزی شکلیں $و^{خرعہ}$، $و^{خربہ}$، $و^{خرجہ}$، ....

استعمال کیجائیں۔

مثال

متماثلہ

$$\frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{(لا-ج)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-ا)(ج-ب)} = ۱$$

سے متماثلہ ذیل اخذ کرو

$$\frac{جب(طہ-بہ)\,جب(طہ-جہ)}{جب(عہ-جہ)\,جب(عہ-بہ)}\,جب۲(طہ-عہ) + \frac{جب(طہ-جہ)\,جب(طہ-عہ)}{جب(بہ-جہ)\,جب(بہ-عہ)}\,جب۲(طہ-بہ)$$

$$+ \frac{جب(طہ-عہ)\,جب(طہ-بہ)}{جب(جہ-عہ)\,جب(جہ-بہ)}\,جب۲(طہ-جہ) = ۰$$

فرض کرو $لا = و^{۲خرطہ}$، $ا = و^{۲خرعہ}$، $ب = و^{۲خربہ}$، $ج = و^{۲خرجہ}$ تو

$$\frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(لا-ب)(ا-ج)} = \frac{(و^{۲خرطہ}-و^{۲خربہ})(و^{۲خرطہ}-و^{۲خرجہ})}{(و^{۲خرعہ}-و^{۲خربہ})(و^{۲خرعہ}-و^{۲خرجہ})} = \frac{\{و^{خر(طہ-بہ)}-و^{-خر(طہ-بہ)}\}\{و^{خر(طہ-جہ)}-و^{-خر(طہ-جہ)}\}}{\{و^{خر(عہ-بہ)}-و^{-خر(عہ-بہ)}\}\{و^{خر(عہ-جہ)}-و^{-خر(عہ-جہ)}\}}$$

$$\times\, و^{۲خر(طہ-عہ)}$$

$$\text{یا} = \frac{\text{جب (طہ - بہ) جب (طہ - جہ)}}{\text{جب (عہ - بہ) جب (عہ - جہ)}} \left\{ \text{جم ۲ (طہ - عہ) + خ جب ۲ (طہ - عہ)} \right\}$$

پس ہر کسر کو اس طریقہ پر مستحیل کرنے اور خ کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے ثابت شدنی متماثلہ حاصل ہوتی ہے۔

سلسلوں کا جمع کرنا

۲۵۶ — جب کسی محدود یا غیر محدود سلسلہ

$$\text{ا}_\text{۰} + \text{ا}_\text{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_\text{۲}\,\text{لا}^\text{۲} + \dots\dots$$

کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلوں

$$\text{ا}_\text{۰}\,\text{جم عہ} + \text{ا}_\text{۱}\,\text{لا جم (عہ + طہ)} + \text{ا}_\text{۲}\,\text{لا}^\text{۲}\,\text{جم (عہ + ۲ طہ)} + \dots\dots،$$

$$\text{ا}_\text{۰}\,\text{جب عہ} + \text{ا}_\text{۱}\,\text{لا جب (عہ + طہ)} + \text{ا}_\text{۲}\,\text{لا}^\text{۲}\,\text{جب (عہ + ۲ طہ)} + \dots\dots$$

کے مجموعے $\text{س}_\text{۱}$ اور $\text{س}_\text{۲}$ اخذ ہو سکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو}\quad \text{ف (لا)} = \text{ا}_\text{۰} + \text{ا}_\text{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_\text{۲}\,\text{لا}^\text{۲} + \dots\dots$$

$$\text{تو}\quad \text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{ف (لا قو}^{\text{خ طہ}}) = \text{س}_\text{۱} + \text{خ س}_\text{۲}$$

$$\text{اور نیز}\quad \text{قو}^{-\text{خ عہ}}\,\text{ف (لا قو}^{-\text{خ طہ}}) = \text{س}_\text{۱} - \text{خ س}_\text{۲}$$

(313)

$$\text{اسلئے}\quad \text{س}_\text{۱} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \left\{ \text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{ف (لا قو}^{\text{خ طہ}}) + \text{قو}^{-\text{خ عہ}}\,\text{ف (لا قو}^{-\text{خ طہ}}) \right\}$$

$$\text{اور}\quad \text{س}_\text{۲} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ خ}} \left\{ \text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{ف (لا قو}^{\text{خ طہ}}) - \text{قو}^{-\text{خ عہ}}\,\text{ف (لا قو}^{-\text{خ طہ}}) \right\}$$

اس طرح س_1 اور س_2 کی جو قیمتیں حاصل ہوں اِن کو اب حقیقی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم ع} + \text{لا جم}(\text{ع} + \text{ب}) + \text{لا}^{2}\,\text{جم}(\text{ع} + ۲\text{ب}) + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جم}\{\text{ع} + (\text{ن}-1)\text{ب}\}$$

اب

$$\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}}{1-\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^{2} + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

اِسمیں لا کو $\text{لا قو}^{\text{خ ب}}$ میں تبدیل کرو اور $\text{قو}^{\text{خ ع}}$ سے ضرب دو تو

$$\text{قو}^{\text{خ ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{+\text{خ ن ب}}}{1-\text{لا قو}^{+\text{خ ب}}} = \text{قو}^{+\text{خ ع}} + \text{لا قو}^{+\text{خ}(\text{ع}+\text{ب})} + \text{لا}^{2}\,\text{قو}^{\text{خ}(\text{ع}+۲\text{ب})} + \ldots$$

$$\ldots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{قو}^{\text{خ}\{\text{ع}+(\text{ن}-1)\text{ب}\}}$$

اور اسی طرح

$$\text{قو}^{-\text{خ ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{-\text{خ ن ب}}}{1-\text{لا قو}^{-\text{خ ب}}} = \text{قو}^{-\text{خ ع}} + \text{لا قو}^{-\text{خ}(\text{ع}+\text{ب})} + \text{لا}^{2}\,\text{قو}^{-\text{خ}(\text{ع}+۲\text{ب})} + \ldots$$

$$\ldots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{قو}^{-\text{خ}\{\text{ع}+(\text{ن}-1)\text{ب}\}}$$

اسلئے دئے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{قو}^{\text{خ ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{\text{خ ن ب}}}{1-\text{لا قو}^{\text{خ ب}}} + \text{قو}^{-\text{خ ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{-\text{خ ن ب}}}{1-\text{لا قو}^{-\text{خ ب}}}\right\}$$

$$\text{یا}\quad \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{\text{خ عہ}}\left(\text{۱}-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{خ ن بہ}}\right)\left(\text{۱}-\text{لا}\,\text{و}^{-\text{خ بہ}}\right)+\text{و}^{-\text{خ عہ}}\left(\text{۱}-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{و}^{-\text{خ ن بہ}}\right)\left(\text{۱}-\text{لا}\,\text{و}^{\text{خ بہ}}\right)}{\left(\text{۱}-\text{لا}\,\text{و}^{\text{خ بہ}}\right)\left(\text{۱}-\text{لا}\,\text{و}^{-\text{خ بہ}}\right)}$$

$$\text{جو}=\frac{\text{جم عہ}-\text{لا جم}(\text{عہ}-\text{بہ})-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{ن بہ})+\text{لا}^{\text{ن}+\text{۱}}\,\text{جم}(\text{عہ}+\overline{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{بہ})}{\text{۱}-\text{۲ لا جم بہ}+\text{لا}^{\text{۲}}}$$

(۲) جمع کرو لامتناہی سلسلہ

$$\text{جب عہ}+\text{لا جب}(\text{عہ}+\text{بہ})+\frac{\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{جب}(\text{عہ}+\text{۲ بہ})}{\underline{|\text{۲}}}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جب}(\text{عہ}+\text{ن بہ})}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\text{اب}\quad \text{و}^{\text{لا}}=\text{۱}+\text{لا}+\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}+\cdots\cdots$$

اسمیں لا کی بجائے $\text{لا و}^{\text{خ بہ}}$ رکھو اور $\text{و}^{\text{خ عہ}}$ سے ضرب دو تو

$$\text{و}^{\text{لا و}^{\text{خ بہ}}+\text{خ عہ}}=\text{و}^{\text{خ عہ}}+\text{لا و}^{\text{خ}(\text{عہ}+\text{بہ})}+\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}}\text{و}^{\text{خ}(\text{عہ}+\text{۲ بہ})}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{و}^{\text{خ}(\text{عہ}+\text{ن بہ})}+\cdots$$

اور اسی طرح

$$\text{و}^{\text{لا و}^{-\text{خ بہ}}-\text{خ عہ}}=\text{و}^{-\text{خ عہ}}+\text{لا و}^{-\text{خ}(\text{عہ}+\text{بہ})}+\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}}\text{و}^{-\text{خ}(\text{عہ}+\text{۲ بہ})}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{و}^{-\text{خ}(\text{عہ}+\text{ن بہ})}+\cdots$$

پس دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{\text{۲ خ}}\left\{\text{و}^{\text{لا و}^{\text{خ بہ}}+\text{خ عہ}}-\text{و}^{\text{لا و}^{-\text{خ بہ}}-\text{خ عہ}}\right\}$$

$$\text{یا}\quad \frac{1}{\text{۲ خ}}\,\text{و}^{\text{لا جم بہ}}\left\{\text{و}^{\text{خ}(\text{لا جب بہ}+\text{عہ})}-\text{و}^{-\text{خ}(\text{لا جب بہ}+\text{عہ})}\right\}\qquad (314)$$

$$\text{جو}=\text{و}^{\text{لا جم بہ}}\,\text{جب}(\text{عہ}+\text{لا جب بہ})$$

۲۵۷ - اب ہم چند مثالیں دینگے جن سے یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعلوں کے قوت نمائی جملے کس طرح جملوں کو سلسلوں میں پھیلانے میں کام آتے ہیں -

(۱) $(1-2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{لا}^2)^{-1}$ کو لا کی قوتوں کے ایک <u>سلسلے</u> میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے - اب

$$(1-2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{لا}^2)^{-1}=(1-\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ط}})^{-1}(1-\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{ط}})^{-1}$$

اِسکو جزوی کسرات میں بیان کرنے سے وہ

$$=\frac{1}{2\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}}\left(\frac{\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ط}}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ط}}}-\frac{\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{ط}}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{ط}}}\right)$$

اور ہر کسر کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}}\left(\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ط}}+\text{لا}\,\text{قو}^{2\,\text{خ}\,\text{ط}}+\text{لا}^2\,\text{قو}^{3\,\text{خ}\,\text{ط}}+\ldots+\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{قو}^{\text{ن}\,\text{خ}\,\text{ط}}+\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}}\left(\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{ط}}+\text{لا}\,\text{قو}^{-2\,\text{خ}\,\text{ط}}+\text{لا}^2\,\text{قو}^{-3\,\text{خ}\,\text{ط}}+\ldots+\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{قو}^{-\text{ن}\,\text{خ}\,\text{ط}}+\ldots\right)$$

جو $=\text{قم}\,\text{ط}\,(\text{جب}\,\text{ط}+\text{لا}\,\text{جب}\,2\,\text{ط}+\text{لا}^2\,\text{جب}\,3\,\text{ط}+\ldots+\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}+\ldots)$

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{1-\text{لا}^2}{1-2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{لا}^2}=1+2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط}+2\,\text{لا}^2\,\text{جم}\,2\,\text{ط}+\ldots+2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط}+\ldots$$

(۲) $\text{لوک}_{\text{و}}(1+2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{لا}^2)$ کو لا کی قوتوں میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے - چونکہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+2\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{لا}^2)=\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ط}})+\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{ط}})$$

اسلئے بائیں جانب کے ہر لوگارتم کو پھیلانے سے دفعہ ۲۵۰ کا ضابطہ (۹) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) $قو^{ا لا}$ جب (ب لا + ج) کو پھیلانے کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں جملہ

$$\frac{1}{۲خ}\left\{قو^{خج} \times قو^{(ا+خب)لا} - قو^{-خج} \times قو^{(ا-خب)لا}\right\}$$

اب اگر ہم $قو^{(ا+خب)لا}$ کو $قو^{(ا-خب)لا}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو $لا^{ن}$ کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{۲خ}\,\frac{1}{\underline{|ن}}\left\{قو^{خج}(ا+خب)^{ن} - قو^{-خج}(ا-خب)^{ن}\right\}$$

فرض کرو کہ $\frac{ب}{ا}$ = مس عہ تو یہ جملہ ہو جاتا ہے

(315)

$$\frac{1}{۲خ}\,\frac{1}{\underline{|ن}}\,(ا^{۲}+ب^{۲})^{\frac{1}{۲}ن}\left\{قو^{خ(ج+ن عہ)} - قو^{-خ(ج+ن عہ)}\right\}$$

یا $\frac{1}{\underline{|ن}}\,(ا^{۲}+ب^{۲})^{\frac{1}{۲}ن}$ جب (ج + ن عہ)

پس یہ جملہ مطلوبہ پھیلاؤ میں $لا^{ن}$ کا سر ہے۔

(۴) اگر یہ دیا جائے کہ جب لا = ن جب (لا + عہ) تو لا کو ن کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں $ن < ۱$ ۔

چونکہ $قو^{خلا} - قو^{-خلا} = ن\left\{قو^{خ(لا+عہ)} - قو^{-خ(لا+عہ)}\right\}$

یا $قو^{۲خلا} - ۱ = ن\, قو^{-خعہ}\left\{قو^{۲خ(لا+عہ)} - ۱\right\}$

اسلئے $\text{و}^{2\text{خ}\,\text{لا}} = \frac{1-\text{ن}\,\text{و}^{-\text{خ}\,\text{عہ}}}{1-\text{ن}\,\text{و}^{\text{خ}\,\text{عہ}}}$

لوکارتم لینے اور بائیں جانب کو پھیلانے سے

$$2\text{خ}(\text{لا}+\text{ک}\pi) = \text{ن}(\text{و}^{\text{خ}\,\text{عہ}} - \text{و}^{-\text{خ}\,\text{عہ}}) + \frac{\text{ن}^2}{2}(\text{و}^{2\text{خ}\,\text{عہ}} - \text{و}^{-2\text{خ}\,\text{عہ}}) + \dots$$

پس $\text{لا}+\text{ک}\pi = \text{ن}\,\text{جب}\,\text{عہ} + \frac{1}{2}\text{ن}^2\,\text{جب}\,2\text{عہ} + \frac{1}{3}\text{ن}^3\,\text{جب}\,3\text{عہ} + \dots$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے۔

اگر ب، ایک مثلث کا زاویہ ہو اور ا سے کم ہو تو ہم ب کے دائری ناپ کو $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جب}\,\text{ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{جب}(\text{ب}+\text{ج})$$

اسلئے $\text{ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{جب}\,\text{ج} + \frac{1}{2}\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\text{جب}\,2\text{ج} + \frac{1}{3}\frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^3}\,\text{جب}\,3\text{ج} + \dots$

کیونکہ اس صورت میں ک = ۰۔

پندرھویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا}+\text{ب}\,\text{ی}}{1-2\text{ی}\,\text{جم}\,\text{فہ}+\text{ی}^2}$ کے پھیلاؤ میں جبکہ اسکو ی کی قوتوں میں پھیلایا جائے عام رقم ہے

$$\frac{\text{ا}\,\text{جب}(\text{ن}+1)\text{فہ} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{فہ}}{\text{جب}\,\text{فہ}}\,\text{ی}^{\text{ن}}$$

اور $\dfrac{\text{ا + ب ی}}{(\text{۱ - ۲ ی جم فہ + ی}^{۲})^{۲}}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم ہے

$$\frac{\text{(ن + ۳) جب (ن + ۱) فہ - (ن + ۱) جب (ن + ۳) فہ}}{\text{۴ جب}^{۳}\text{ فہ}}\ \text{ا ی}^{\text{ن}}$$

$$+\ \frac{\text{(ن + ۲) جب ن فہ - ن جب (ن + ۲) فہ}}{\text{۴ جب}^{۳}\text{ فہ}}\ \text{ب ی}^{\text{ن}}$$

(یولر)

(316)

۲ ۔ اگر مس لا = $\dfrac{\text{ن جب عہ}}{\text{۱ - ن جم عہ}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا = ن جب عہ + }\frac{۱}{۲}\text{ ن}^{۲}\text{ جب ۲ عہ + }\frac{۱}{۳}\text{ ن}^{۳}\text{ جب ۳ عہ + ...}$$

جبکہ ن ایک سے کم ہے۔

۳ ۔ اگر مم ما = مم لا + قم عہ قم لا تو ثابت کرو کہ

$$\text{ما = جب لا جب عہ - }\frac{۱}{۲}\text{ جب ۲ لا جب}^{۲}\text{ عہ + }\frac{۱}{۳}\text{ جب ۳ لا جب}^{۳}\text{ عہ - ...}$$

۴ ۔ اگر مس $\frac{۱}{۲}$ طہ = $\left(\dfrac{\text{۱ + ا}}{\text{۱ - ا}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ مس $\frac{۱}{۲}$ فہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ = فہ + ۲ لہ جب فہ + }\frac{\text{۲ لہ}^{۲}}{۲}\text{ جب ۲ فہ + }\frac{\text{۲ لہ}^{۳}}{۳}\text{ جب ۳ فہ + ...}$$

جہاں $\text{لہ = }\frac{\text{ا}}{۲}\text{ + }\left(\frac{\text{ا}}{۲}\right)^{۳}\text{ + ۲ }\left(\frac{\text{ا}}{۲}\right)^{۵}\text{ + ۵ }\left(\frac{\text{ا}}{۲}\right)^{۷}\text{ + ...}$

۵ ۔ اگر مس طہ = لا + مس عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ = عہ + لا جم}^{۲}\text{ عہ - }\frac{۱}{۲}\text{ لا}^{۲}\text{ جم}^{۲}\text{ عہ جب ۲ عہ - }\frac{۱}{۳}\text{ لا}^{۳}\text{ جم}^{۳}\text{ عہ جم ۳ عہ}$$

$$+\ \frac{۱}{۴}\text{ لا}^{۴}\text{ جم}^{۴}\text{ عہ جب ۴ عہ + ...}$$

۶ — اگر (۱ + م) مس ط = (۱ − م) مس فہ جبکہ ط اور فہ مثبت حادہ زاویئے ہوں تو ثابت کرو کہ

ط = فہ − م جب ۲ فہ + ½ م² جب ۴ فہ − ⅓ م³ جب ۶ فہ + ...

۷ — اگر مس ء = جم ۲ سہ مس لہ تو ثابت کرو کہ

لہ − ء = مس² سہ جب ۲ ء + ½ مس⁴ سہ جب ۴ ء + ⅓ مس⁶ سہ جب ۶ ء + ...

۸ — اگر جب لا = ن جم (لا + ء) تو لا کو ن کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۹ — ثابت کرو کہ (۱ − ۲ لا جم ط + لا²)^−ن کے پھیلاؤ میں لا^پ کا سر ہے

۲ { اُ_پ جم پ ط + اُ_۱ اُ_پ−۱ جم (پ − ۲) ط + اُ_۲ اُ_پ−۲ جم (پ − ۴) ط + ... }

جہاں اُ_م ، (۱ − لا)^−ن کے پھیلاؤ میں لا^م کا سر ہے۔

۱۰ — ثابت کرو کہ ۱۸ = π² $\sum_{ن=۰}^{ن=\infty}$ $\dfrac{\lfloor ن \; \lfloor ن}{\lfloor ۲ن + ۲}$

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

لوک ج = لوک ا − (ب/ا) جم ج − (ب²/۲ا²) جم ۲ ج − (ب³/۳ا³) جم ۳ ج − .....

یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ب ، ا سے کم ہے۔

۱۲ — اگر مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں خیالی ہوں تو ثابت کرو کہ (ا لا² + ب لا + ج)^−۱ کے پھیلاؤ میں لا^ن کا سر ہے

$$\frac{ا^{\frac{1}{2}ن} \text{ جب } (ن + ۱) \text{ ط}}{ج^{\frac{1}{2}ن + ۱} \text{ جب ط}}$$

جہاں ط، مساوات $\text{ب قط ط} + ۲\sqrt{\text{ا ج}} = ۰$ سے حاصل ہوا ہے۔

۱۳۔ اگر $\text{پ}^۲ = \dfrac{(۱+\text{ن})^۲ \text{ جم}^۲\text{ط} + (۱-\text{ن})^۲ \text{ جب}^۲\text{ط}}{(۱+\text{ن})^۲ \text{ جم}^۲\text{ط} + (۱-\text{ن})^۲ \text{ جب}^۲\text{ط}}$ تو $\text{لوک}_\text{و}\text{ پ}$ کو ط جفت ضعفوں کی جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۱۴۔ $\text{لوک}_\text{و}\text{ جم}\left(\text{ط} + \frac{۱}{۴}\pi\right)$ کو ط کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(317)

۱۵۔ ثابت کرو کہ $\dfrac{\pi}{۴} = \dfrac{۱۷}{۲۱} - \dfrac{۷۱۳}{۸۱ \times ۳۴۳} + \dots + \dfrac{(-۱)^{\text{ن}+۱}}{۲\text{ن}-۱}\left\{\dfrac{۲}{۳}\left(\dfrac{۱}{۹}\right)^{\text{ن}-۱} + \dfrac{۱}{۷^{۲\text{ن}-۱}}\right\} + \dots\dots$

۱۶۔ ثابت کرو کہ $۱ - \dfrac{۱}{۷} + \dfrac{۱}{۹} - \dfrac{۱}{۱۵} + \dfrac{۱}{۱۷} - \dfrac{۱}{۲۳} + \dfrac{۱}{۲۵} - \dots = \dfrac{\pi(۱+\sqrt{۲})}{۸}$

۱۷۔ $(\sqrt{-۱})^{\sqrt{-۱}}$ کی سب قیمتیں معلوم کرو۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ $(۱ + \sqrt{-۱}\text{ مس ف})^{\sqrt{-۱}}$ ۔ $\text{لوک}_\text{و}(\text{ا قط ف})$ ایک حقیقی عدد ہے اور اسکی قیمت معلوم کرو۔

۱۹۔ اگر $\text{ا جم ط} + \text{ب جب ط} = \text{ج}$ جہاں $\text{ج} > \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ط} = (۴\text{ن}+۱)\frac{\pi}{۲} \pm \text{خ}\,\text{لوک}_\text{و}\frac{\text{ج} + \sqrt{\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}} - \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

۲۰۔ $\text{لا}^\text{ن} + ۱$ کے اس جملہ سے جو اجزائے ضربی میں ہے یہ اخذ کرو کہ جب ن

جفت ہو تو

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{۱ + جم ن طہ}} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ۲ طہ} - \text{۲ جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{جب طہ}}{\text{۱ + جم ۲ طہ} - \text{۲ جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{جم طہ}}$$

$$+ \text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ۲ طہ} - \text{۲ جم}\frac{\text{۳}\pi}{\text{ن}}\ \text{جب طہ}}{\text{۱ + جم ۲ طہ} - \text{۲ جم}\frac{\text{۳}\pi}{\text{ن}}\ \text{جم طہ}} + \cdots\cdots$$

۲۱ — تماثلہ $\frac{1}{\text{لا} - \text{ا}} - \frac{1}{\text{لا} - \text{ب}} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})}$ سے اخذ کرو

جم (طہ + عہ) جب (طہ − یہ) − جم (طہ + یہ) جب (طہ − عہ) = جب (عہ − یہ) جم ۲ طہ،

جب (طہ + عہ) جب (طہ − یہ) − جب (طہ + یہ) جب (طہ − عہ) = جب (عہ − یہ) جب ۲ طہ

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}^{-1}\text{عہ}}{\text{عہ}} + \frac{\text{مس}^{-1}\text{یہ}}{\text{یہ}} + \frac{\text{مس}^{-1}\text{جہ}}{\text{جہ}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{لوک}\ \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 3\left(1 - \frac{1}{7}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{25} - \cdots\cdots\right)$$

جہاں عہ، یہ، جہ اکائی کے تین جذر الکعب ہیں —

۲۳ — اساس ا + ب خ یہ ج + د خ کے لوکارتموں کو شکل ا + ب خ میں بیان کرو —

۲۴ — اگر $\text{مس}^{\text{م}}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\text{یہ}\right) = \text{مس}^{\text{ن}}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\text{فہ}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{م مس}^{-1}\frac{\text{جب یہ}}{\text{خ}} = \text{ن مس}^{-1}\frac{\text{جب فہ}}{\text{خ}}$$

۲۵ — کسی مثلث میں ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{\text{ن}}\ \text{جم ن ب} + \text{ب}^{\text{ن}}\ \text{جم ن ا} = \text{ج}^{\text{ن}} - \text{ن ا ب ج}^{\text{ن}-2}\ \text{جم}(\text{ا} - \text{ب})$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن} - 3)}{\underline{|2}}\ \text{ا}^2\ \text{ب}^2\ \text{ج}^{\text{ن}-4}\ \text{جم ۲}(\text{ا} - \text{ب}) - \cdots\cdots$$

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۶ ۔ اگر لوک$_{و}$ لوک$_{و}$ لوک$_{و}$ (ع + خ ب) = ف + خ ق

تو و$^{و^{ف} جم ق}$ جم (و^{ف} جب ق) = $\frac{۲}{۲}$ لوک$_{و}$ (ع^{۲} + ب^{۲})

اور و$^{و^{ف} جب ق}$ × جب (و^{ف} جب ق) = مس$^{-۱}$ $\frac{ب}{ع}$

(318) ۲۷ ۔ اگر و^{لا} جم لا کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ

لا^{ن} کا سر $\frac{۲^{\frac{ن}{۲}}}{\lfloor ن}$ جم $\frac{ن \pi}{۴}$ ہے۔

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ

$\frac{۱}{(۱ + و جم ط)^{۲}}$ = قط^{۳} ۲ لہ + ... + (-۱)^{ن} ۲ قط^{۳} ۲ لہ مس لہ (۱ + ن جم ۲ لہ) جم ن ط + ...

جہاں ۲ لہ، جب$^{-۱}$ و کی کم سے کم مثبت قیمت ہے۔

۲۹ ۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$\frac{۱}{۱ \times ۳ \times ۵ \ldots (۲م + ۱)}$ − $\frac{۱}{۳ \times ۵ \times ۷ \ldots (۲م + ۳)}$ + ... ∞ تک

کو شکل $\frac{ا_{م} \pi + ب_{م}}{ج_{م}}$ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں ا$_{م}$، ب$_{م}$، ج$_{م}$

صحیح عدد ہیں اور

ا$_{م}$ = ۱ × ۳ × ۵ .... (۲م - ۱)، ج$_{م}$ = $\frac{\lfloor ۲م}{۲^{م-۲}}$

ب$_{م}$ = (۲م - ۱) ب$_{م-۱}$ - ۲ $\lfloor (م - ۱)$

۳۰ ۔ ثابت کرو کہ

جب^{ن} ط جم ن فہ = جب^{ن} فہ جم ن ط + ن جب$^{ن-۱}$ فہ جم (ن - ۱) فہ جب (ط - فہ)

$+ \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}$ جب$^{ن-۲}$ فہ جم (ن-۲) طہ جب^{۲} (طہ - فہ) + ... + جب^{ن} (طہ - فہ)

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۳۱ – ثابت کرو کہ متماثلہ

$$\Sigma \frac{\text{جم ۲ عہ}}{\text{جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ} - \text{یہ}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ} - \text{جہ}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ} - \text{ضہ})} = \text{ہ جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ} + \text{یہ} + \text{جہ} + \text{ضہ})$$

۳۲ – ثابت کرو کہ $۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \ldots = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۳۳ – مس$^{-۱}$ (جم طہ + خ جب طہ) کو شکل ا + خ ب میں تحویل کرو اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$\text{جم طہ} - \frac{۱}{۳} \text{ جم ۳ طہ} + \frac{۱}{۵} \text{ جم ۵ طہ} - \ldots = \pm \frac{\pi}{۴}$$

جہاں اوپر کی یا نیچے کی علامت لینی چاہیئے بموجب اسکے کہ جم طہ مثبت ہے یا منفی

۳۴ – ثابت کرو کہ لوک$_{و}$ (۱ + جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ) کی ایک قیمت لوک$_{و}$ (۲ جم طہ) + خ طہ ہے جبکہ طہ، $-\frac{۱}{۲}\pi$ اور $\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ گریگوری کا سلسلہ اخذ کرو۔

ثابت کرو کہ جب$^{-۱}$ (جم طہ + خ جب طہ) کی ایک قیمت ہے

$$\text{جم}^{-۱}\sqrt{\text{جب طہ}} + \text{خ لوک}_{و}\left(\sqrt{\text{جب طہ}} + \sqrt{۱ + \text{جب طہ}}\right)$$

جبکہ طہ، صفر اور $\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔

۳۵ – سلسلہ Σ ا$_{ن}$ و$^{(۲ن+۱)}$ جب (۲ن + ۱) ما کا مجموعہ معلوم کرو جہاں

$$\text{ا}_{ن} = \frac{۲}{۲ن + ۱} - \frac{۱}{۲ن - ۱} - \frac{۱}{۲ن + ۳}$$

۳۶ — کسی مثلث میں اگر ا < ج تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ن ا}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ج}^{\text{ن}}}\left\{1 + \text{ن}\,\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\,\text{جم ب} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{\lfloor 2}\,\frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2}\,\text{جم ۲ ب}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{\lfloor 3}\,\frac{\text{ا}^3}{\text{ج}^3}\,\text{جم ۳ ب} + \cdots\right\}$$

(318)

۳۷ — ثابت کرو کہ

$$(\text{مس}^{-1}\text{لا})^2 = \text{لا}^2 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)\text{لا}^4 + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\text{لا}^6 - \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{\text{ن}-1}}{\text{ن}}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\text{ن}-1}\right)\text{لا}^{2\text{ن}} + \cdots$$

جہاں لا ± ۱ کے درمیان واقع ہے۔

۳۸ — اگر $\text{ع} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,\text{لا}\right) = \text{لا} + \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{1}{5}\text{لا}^5 + \cdots$

تو ثابت کرو کہ　$\text{لا} = \text{ع} - \frac{1}{3}\text{ع}^3 + \frac{1}{5}\text{ع}^5 - \cdots\cdots$

۳۹ — $\text{مس}\left\{\text{خرج لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{ا} - \text{خ ب}}{\text{ا} + \text{خ ب}}\right\}$ کو منطق بناؤ۔

۴۰ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم لا}}{\lfloor \text{ن}-1\ \lfloor \text{ن}+1} + \frac{\text{جم ۲ لا}}{\lfloor \text{ن}-2\ \lfloor \text{ن}+2} + \cdots + \frac{\text{جم ن لا}}{\lfloor 2\text{ن}}$$

$$= \frac{2^{\text{ن}-1}(1+\text{جم لا})^{\text{ن}}}{\lfloor 2\text{ن}} - \frac{1}{2(\lfloor \text{ن})^2}$$

۴۱ — اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو اور

س = ۱ + ن جم² ط + ... + (|ن + ر - ۲) / (|ن - ۱ |ر - ۱) جم^(ر-۱) ط جم (ر - ۱) ط + ...

تو ثابت کرو کہ

۲س جب^ن ط = {۱ + (-۱)^ن} (-۱)^(ن/۲) جم ن ط + {۱ - (-۱)^ن} (-۱)^(½(ن-۱)) جب ن ط

۴۲ — ثابت کرو کہ مس مس مس ... مس لا (ن ماسوں تک) کا پھیلاؤ یہ ہے

لا + ۲ن لا³/|۳ + ۴ن (۵ن - ۱) لا⁵/|۵ + ۸ن/۳ (۱۷۵ن² - ۴۸ن + ۱۱) لا⁷/|۷ + ...

۴۳ — اگر مس (¼ عہ - فہ) = مس³ ¼ عہ تو ثابت کرو کہ

فہ = ۱/(۱×۳) جب عہ - ۱/(۲×۳²) جب ۲عہ + ۱/(۳×۳³) جب ۳عہ - ...

۴۴ — اگر مس ط < ۱ تو ثابت کرو کہ

مس² ط - ½ مس⁴ ط + ⅓ مس⁶ ط - ..... = جب² ط + ½ جب⁴ ط + ⅓ جب⁶ ط + ...

۴۵ — ثابت کرو کہ

۱ + ن(ن - ۱)(ن - ۲)/|۳ + ن(ن - ۱)(ن - ۲)(ن - ۳)(ن - ۴)(ن - ۵)/|۶ + ...

= ⅓ {۲^ن + (-۱)^ن × ۲ جم ۲ن π/۳}

۴۶ — ثابت کرو کہ مساواتیں

لا² جب ۲عہ + ما² جب ۲بہ + ی² جب ۲جہ - ۲ ما ی جب (بہ + جہ) - ۲ ی لا جب (جہ + عہ)
- ۲ لا ما جب (عہ + بہ) = ۰ ،

لا² جم ۲عہ + ما² جم ۲بہ + ی² جم ۲جہ - ۲ ما ی جم (بہ + جہ) - ۲ ی لا جم (جہ + عہ)
- ۲ لا ما جم (عہ + بہ) = ۰ ،

حسب ذیل قیمتوں کے جٹوں میں سے کسی سے پوری ہوتی ہیں :-

$$لا : ما : ی = جب^2 \frac{1}{2}(بہ - جہ) : جب^2 \frac{1}{2}(جہ - عہ) : جب^2 \frac{1}{2}(عہ - بہ)$$

یا $= جب^2 \frac{1}{2}(بہ - جہ) : جم^2 \frac{1}{2}(جہ - عہ) : جم^2 \frac{1}{2}(عہ - بہ)$

یا $= جم^2 \frac{1}{2}(بہ - جہ) : جب^2 \frac{1}{2}(جہ - عہ) : جم^2 \frac{1}{2}(عہ - بہ)$

یا $= جم^2 \frac{1}{2}(بہ - جہ) : جم^2 \frac{1}{2}(جہ - عہ) : جب^2 \frac{1}{2}(عہ - بہ)$

(320) ۴۷ — اگر طہ کی مختلف قیمتیں $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$، $طہ_4$ ہوں جو مساوات

$$ا جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ + ج جم طہ + د جب طہ + ع = ۰$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا}{جم س} = \frac{ب}{جب س} = \frac{-ج}{\Sigma جم (س - طہ)} = \frac{-د}{\Sigma جب (س - طہ)} = \frac{ع}{\Sigma جم \frac{1}{2}(طہ_1 + طہ_2 - طہ_3 - طہ_4)}$$

جہاں $۲ س = طہ_1 + طہ_2 + طہ_3 + طہ_4$

۴۸ — ثابت کرو کہ

$$(-1)^{\frac{1}{2}ن} مس^ن طہ = ۱ - ن قط طہ جم طہ + \frac{ن(ن-۲)}{\underline{|۲}} قط^2 طہ جم ۲ طہ - \ldots، (ن جفت)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(ن-1)} مس^ن طہ = ن قط طہ جب طہ - \frac{ن(ن-1)}{\underline{|۲}} قط^2 طہ جب ۲ طہ + \ldots، (ن طاق)$$

۴۹ — اگر $جب^{-1} لا = ا_1 لا + ا_3 لا^3 + \ldots$ تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$ا_3 لا^3 + ا_9 لا^9 + ا_{15} لا^{15} + \ldots$$

کا مجموعہ $\frac{1}{3}\left\{جم^{-1}\left(\sqrt{1 + لا^2 + لا^4} - لا^2\right) + جب^{-1} لا\right\}$ ہے۔

۵۰ — اگر مساوات $لا^ن + ب_1 لا^{ن-1} + ب_2 لا^{ن-2} + \ldots + ب_ن = ۰$ کی ن اصلیں عہ، بہ، جہ، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{عہ جب طہ}}{\text{عہ جم طہ} - \text{لا}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{بہ جب طہ}}{\text{بہ جم طہ} - \text{لا}} + \ldots\ldots$$

$$= \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}_1\,\text{جب طہ} \times \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{جب ۲طہ} \times \text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots + \text{ب}_\text{ن}\,\text{جب ن طہ}}{\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{جم طہ} \times \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{جم ۲طہ} \times \text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots + \text{ب}_\text{ن}\,\text{جم ن طہ}}$$

۵۱ — اگر (۱ − ج) مس طہ = (۱ + ج) مس فہ تو سلسلوں

$$\text{ج جب ۲طہ} - \frac{1}{2}\text{ج}^2\,\text{جب ۴طہ} + \frac{1}{3}\text{ج}^3\,\text{جب ۶طہ} - \ldots\ldots$$

$$\text{ج جب ۲فہ} + \frac{1}{2}\text{ج}^2\,\text{جب ۴فہ} + \frac{1}{3}\text{ج}^3\,\text{جب ۶فہ} + \ldots\ldots$$

میں سے ہر ایک طہ − فہ کے مساوی ہے جہاں طہ اور فہ ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں اور ج < ۱ ۔

۵۲ — ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\,\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\,\text{جم}\,\frac{2}{2}\pi + \frac{1}{3}\,\text{جم}\,\frac{3}{2}\pi + \ldots\ldots\ \infty\ \text{تک} = 0$$

۵۳ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{جم لا} + \frac{1}{2\times3}\,\text{جم ۳لا} + \frac{1\times3}{2\times4\times5}\,\text{جم ۵لا} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times7}\,\text{جم ۷لا} + \ldots$$

حسب ذیل قیمتیں اختیار کرتا ہے

(۱) $\text{جب}^{-1}\left(\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{لا} - \text{جب}\,\frac{1}{2}\text{لا}\right)$، جبکہ $\pi > \text{لا} > 0$ ۔

(۲) $-\text{جب}^{-1}\left(\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{لا} + \text{جب}\,\frac{1}{2}\text{لا}\right)$، جبکہ $2\pi > \text{لا} > \pi$

۵۴ — اگر $\text{ج} = \text{جم}^2\,\text{طہ} - \frac{1}{3}\text{جم}^3\,\text{طہ جم ۳طہ} + \frac{1}{5}\text{جم}^5\,\text{طہ جم ۵طہ} - \ldots\ldots$

تو ثابت کرو کہ $\text{مس ۲ج} = 2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}$

۵۵ — ثابت کرو کہ

$$\text{ع}^{\text{عہ جم بہ}}\,\text{جب}(\text{عہ جب بہ}) + \text{ع}^{\text{عہ جم ۲بہ}}\,\text{جب}(\text{عہ جب ۲بہ}) + \ldots + \text{ع}^{\text{عہ جم (ن}-1)\text{بہ}}\,\text{جب}\{\text{عہ جب (ن}-1)\text{بہ}\} =$$

اگر $\text{بہ} = 2\pi/\text{ن}$ ۔

(321)

۵۶ — ثابت کرو کہ

جب طہ × جب طہ − ½ جب ۲ طہ جب² طہ + ⅓ جب ۳ طہ جب³ طہ − ...

= مم⁻¹ (۱ + مم طہ + مم² طہ)

۵۷ — ثابت کرو کہ

لوک (قم لا) = ۲ (جم² لا − ½ جب² ۲ لا + ⅓ جم² ۳ لا − ¼ جب² ۴ لا + ...)

۵۸ — ثابت کرو کہ

جم⁻¹ (۱ − لا) = √۲لا { ۱ + ⅓ × ½ (لا/۲) + ... + ۱/(۲ن + ۱) · (۱ × ۳ × ۵ ... (۲ن − ۱))/(۲ × ۴ × ۶ ... ۲ن) (لا/۲)^ن

+ .... }

۵۹ — ثابت کرو کہ سلسلہ

۱ − ½ جم طہ + (۱ × ۳)/(۲ × ۴) جم ۲ طہ − (۱ × ۳ × ۵)/(۲ × ۴ × ۶) جم ۳ طہ + ... کا مجموعہ (جم ½ طہ)/(√(۲ جم ½ طہ))

ہے جہاں طہ ± π کے درمیان واقع ہے۔

امثلۂ ذیل کے لا متناہی سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرو:-

۶۰ — جم طہ − ⅓ جم ۳ طہ + ⅕ جم ۵ طہ − .....

۶۱ — ۱ − (جم ۲ طہ)/۲! + (جم ۴ طہ)/۴! − ....

۶۲ — جم طہ + (قم طہ)/۱! جم ۲ طہ + (قم² طہ)/۲! جم ۳ طہ + ...

۶۳ — جم طہ جم ۲ طہ + جم ۲ طہ جم ۳ طہ + 1/۲! جم ۳ طہ جم ۴ طہ

+ 1/۳! جم ۴ طہ جم ۵ طہ + ...

$$\text{٦٤۔}\quad \text{جب طہ} - \frac{1}{\lfloor 3}\,\text{جب ٣ طہ} + \frac{1}{\lfloor 5}\,\text{جب ٥ طہ} - \ldots\ldots$$

$$\text{٦٥۔}\quad \frac{\text{جم طہ}}{1\times 2\times 3} + \frac{\text{جم ٢ طہ}}{2\times 3\times 4} + \frac{\text{جم ٣ طہ}}{3\times 4\times 5} + \ldots\ldots$$

$$\text{٦٦۔}\quad \text{جم عہ} + \frac{\text{جم}(\text{عہ} + 2\,\text{بہ})}{\lfloor 3} + \frac{\text{جم}(\text{عہ} + 4\,\text{بہ})}{\lfloor 5} + \ldots\ldots$$

$$\text{٦٧۔}\quad \text{جم طہ جم فہ} - \frac{1}{2}\,\text{جم ٢ طہ جم ٢ فہ} + \frac{1}{3}\,\text{جم ٣ طہ جم ٣ فہ} - \ldots\ldots$$

$$\text{٦٨۔}\quad \text{مس عہ جب ٢ لا} + \frac{\text{مس}^{2}\,\text{عہ جب ٣ لا}}{\lfloor 2} + \frac{\text{مس}^{3}\,\text{عہ جب ٤ لا}}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$$

$$\text{٦٩۔}\quad 1 + \text{خو}^{\text{جم طہ}}\,\text{جم}(\text{جب طہ}) + \frac{\text{خو}^{2\,\text{جم طہ}}}{\lfloor 2}\,\text{جم}(2\,\text{جب طہ}) + \frac{\text{خو}^{3\,\text{جم عہ}}}{\lfloor 3}\,\text{جم}(3\,\text{جب طہ}) + \ldots$$

$$\text{٧٠۔}\quad \text{جب طہ} \times \text{جب طہ} - \frac{1}{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ} \times \text{جب ٢ طہ} + \frac{1}{3}\,\text{جب}^{3}\,\text{طہ} \times \text{جب ٣ طہ} - \ldots\ldots$$

$$\text{٧١۔}\quad \text{م جب}^{2}\,\text{عہ} - \frac{1}{2}\,\text{م}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{٢ عہ} + \frac{1}{3}\,\text{م}^{3}\,\text{جب}^{2}\,\text{٣ عہ} - \ldots\ldots$$

جہاں $\text{م} < 1$ ۔

(322)

سولھواں باب

زائدی تفاعلات

۲۵۸ ـــ زائدی جیب التمام، جیب، مماس، ... کی تعریف پندرہویں باب میں مساواتوں

جمز ع = ½ (قوع + قو‾ع)، جبز ع = ½ (قوع ـ قو‾ع)، مسز ع = جبز ع \ جمز ع،

ممز ع = ۱ \ مسز ع، قطز ع = ۱ \ جمز ع، قمز ع = ۱ \ جبز ع

کے ذریعہ ہو چکی ہے جہاں قوت نما قوع، قو‾ع اپنی صدر قیمتیں رکھتے ہیں۔ یہ زائدی تفاعل، خ ع کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں حسب ذیل مساواتوں کے ذریعہ بیان ہوتے ہیں:ـ

جمز ع = جم خ ع، جبز ع = ـ خ جب خ ع، مسز ع = ـ خ مس خ ع،

ممز ع = خ مم خ ع، قطز ع = قط خ ع، قمز ع = خ قم خ ع

زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۵۹ ـــ زائدی تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتے تعریفوں سے فوراً حاصل ہوتے ہیں:ـ

جمز^{2} ع ـ جبز^{2} ع = ۱، .... (۱)

$$\text{قطز}^2\,\text{ع} + \text{مسز}^2\,\text{ع} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{ممز}^2\,\text{ع} + \text{قمز}^2\,\text{ع} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

یہ رشتے دائری تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتوں

$$\text{جم}^2\,\text{ط} + \text{جب}^2\,\text{ط} = 1،\quad \text{قط}^2\,\text{ط} - \text{مس}^2\,\text{ط} = 1،\quad \text{قم}^2\,\text{ط} - \text{مم}^2\,\text{ط} = 1$$

کے جواب میں ہیں اور انہیں ط = خ ع رکھنے سے فوراً اخذ ہوتے ہیں۔ رشتوں (۱)، (۲)، (۳) سے اور زائدی تفاعلوں کی تعریفوں کی مدد سے کسی بھی زائدی تفاعل کو کسی دوسرے زائدی تفاعل کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ نتائج حسب ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔ (323)

	جبز ع = لا	جمز ع = لا	مسز ع = لا	ممز ع = لا	قطز ع = لا	قمز ع = لا
جبز ع =	لا	$\sqrt{\text{لا}^2-1}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2-1}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	$\frac{1}{\text{لا}}$
جمز ع =	$\sqrt{1+\text{لا}^2}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-1}}$	$\frac{1}{\text{لا}}$	$\frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{\text{لا}}$
مسز ع =	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$	$\frac{\sqrt{\text{لا}^2-1}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{1}{\text{لا}}$	$\sqrt{1-\text{لا}^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$
ممز ع =	$\frac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-1}}$	$\frac{1}{\text{لا}}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$	$\sqrt{1+\text{لا}^2}$
قطز ع =	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$	$\frac{1}{\text{لا}}$	$\sqrt{1-\text{لا}^2}$	$\frac{\sqrt{\text{لا}^2-1}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$
قمز ع =	$\frac{1}{\text{لا}}$	$\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2-1}}$	$\frac{\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لا}}$	$\sqrt{\text{لا}^2-1}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$	لا

جمع کے ضابطے

۲۶۰ — چونکہ جمز(ع ± و) = جم خ(ع ± و) = جم خ ع جم خ و ± جیب خ ع جیب خ و

پس جمز(ع ± و) = جمز ع جمز و ± جبز ع جبز و، ...... (۴)

اسی طرح جبز(ع ± و) = جبز ع جمز و ± جمز ع جبز و، ...... (۵)

یہ زائدی جیب التمام اور جیب کے لئے جمع کے ضابطے ہیں، بلا شبہ انکی تصدیق ان تفاعلوں کی قوت نمائیتوں کو درج کرنے سے ہو سکتی ہے۔

(۴) اور (۵) سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\text{مسز}(\text{ع} \pm \text{و}) = \frac{\text{مسز ع} \pm \text{مسز و}}{1 \pm \text{مسز ع مسز و}}, \quad \ldots\ldots (6)$$

$$\text{ممز}(\text{ع} \pm \text{و}) = \frac{\text{ممز ع ممز و} \pm 1}{\text{ممز و} \pm \text{ممز ع}}, \quad \ldots\ldots (7)$$

۲۶۱ — چونکہ جبز(ع + و) + جبز(ع − و) = ۲ جبز ع جمز و،

جبز(ع + و) − جبز(ع − و) = ۲ جمز ع جبز و،

جمز(ع + و) + جمز(ع − و) = ۲ جمز ع جمز و،

اور جمز(ع + و) − جمز(ع − و) = ۲ جبز ع جبز و،

اسلئے ع، و کو علی الترتیب $\frac{1}{2}$(ع + و)، $\frac{1}{2}$(ع − و) میں بدلنے سے (324)

حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جبز ع + جبز و = ۲ جبز $\frac{1}{2}$(ع + و) جمز $\frac{1}{2}$(ع − و)،

جبز ع − جبز و = ۲ جمز $\frac{1}{2}$(ع + و) جبز $\frac{1}{2}$(ع − و)،

جمز ع + جمز و = ۲ جمز $\frac{1}{2}$(ع + و) جمز $\frac{1}{2}$(ع − و)، ...(۸)

جمز ع − جمز و = ۲ جبز $\frac{1}{2}$(ع + و) جبز $\frac{1}{2}$(ع − و)،

یہ ضابطے دو زائدی جیوب یا جیوب التمام کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کے لئے ہیں۔

ضِعفوں یا تحت ضِعفوں کیلئے ضابطے

۲۶۲ — دائری تفاعلوں کے ضابطوں کے جواب میں ضِعفوں یا تحت ضِعفوں کے زائدی تفاعلوں کے درمیان مماثل رشتے، ضابطوں (۴)، (۵)، (۶)، اور (۸) سے اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جبز}\,۲ع = ۲\,\text{جبز}\,ع\,.\,\text{جمز}\,ع\,،$$

$$\text{جمز}\,۲ع = \text{جمز}^۲ع + \text{جبز}^۲ع = ۲\,\text{جمز}^۲ع - ۱ = ۱ + ۲\,\text{جبز}^۲ع\,،$$

$$\text{مسز}\,۲ع = \frac{۲\,\text{مسز}\,ع}{۱ + \text{مسز}^۲ع}\,،\quad \text{جبز}\,۳ع = ۳\,\text{جبز}\,ع + ۴\,\text{جبز}^۳ع\,،$$

$$\text{جمز}\,۳ع = ۴\,\text{جمز}^۳ع - ۳\,\text{جمز}\,ع\,،$$

$$\text{مسز}\,۳ع = \frac{۳\,\text{مسز}\,ع + \text{مسز}^۳ع}{۱ + ۳\,\text{مسز}^۲ع}\,،\quad \text{جمز}\,\tfrac{۱}{۲}ع = \sqrt{\frac{۱ + \text{جمز}\,ع}{۲}}\,،$$

$$\text{جبز}\,\tfrac{۱}{۲}ع = \sqrt{\frac{\text{جمز}\,ع - ۱}{۲}}\,،\quad \text{مسز}\,\tfrac{۱}{۲}ع = \sqrt{\frac{\text{جمز}\,ع - ۱}{\text{جمز}\,ع + ۱}} = \frac{\text{جبز}\,ع}{۱ + \text{جمز}\,ع}$$

زائدی تفاعلوں کے لئے سلسلے

۲۶۳ — چونکہ $\text{قو}^{ع} = \text{جمز}\,ع + \text{جبز}\,ع$، $\text{قو}^{-ع} = \text{جمز}\,ع - \text{جبز}\,ع$
اس لئے جمز ع، جبز ع کے لئے سلسلے، ع کی قوتوں میں، یہ ہیں

$$\text{جمز}\,ع = ۱ + \frac{ع^۲}{|۲} + \frac{ع^۴}{|۴} + \ldots\ldots\,،\quad \text{جبز}\,ع = ع + \frac{ع^۳}{|۳} + \frac{ع^۵}{|۵} + \ldots\ldots$$

دفعہ ۲۳۳ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{جمز}\,ع = ۱ + ب$، $\text{جبز}\,ع = ع + س$

(325)

جہاں

اب|د ½ ا ع ا² تو ا ع ا ، اس|د ¼ ا ع ا³ تو ا ع ا

نیز (جمز ع ± جبز ع)^م کی صدر قیمت ہمیشہ ہے

جمز م ع ± جبز م ع

خواہ م کچھ ہی ہو، یہ دائری تفاعلوں کے لئے ڈیموائر کے مسئلہ کا جواب ہے۔ ہم اس مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں اس طرح

جمز م ع = ½ {(جمز ع + جبز ع)^م + (جمز ع − جبز ع)^م}،

جبز م ع = ½ {(جمز ع + جبز ع)^م − (جمز ع − جبز ع)^م}

۲۶۴ — اِن آخری جملوں سے پھیلاؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

جبز م ع = م جمز^(م−۱) ع جبز ع + (م(م−۱)(م−۲) / |۳) جمز^(م−۳) ع جبز³ ع + ...،

جمز م ع = جمز^م ع + (م(م−۱) / |۲) جمز^(م−۲) ع جبز² ع + (م(م−۱)(م−۲)(م−۳) / |۴) جمز^(م−۴) ع
× جبز⁴ ع + ...

دائری تفاعلوں کی صورت کی مانند ان سلسلوں سے جبز م ع، جمز م ع کے پھیلاؤ، جبز ع کی قوتوں میں حاصل کئے جا سکتے ہیں: لیکن مختلف سروں کو اکٹھا کرنیکے کام کو دُہرانا غیر ضروری ہے کیونکہ ہم دفعہ ۲۱۴، چودھویں باب کے ضابطہ میں ط کی بجائے خ ع درج کرکے نتیجہ کو فوراً حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

جبز م ع = م جبز ع + (م(م² − ۱²) / |۳) جبز³ ع + (م(م² − ۱²)(م² − ۳²) / |۵) جبز⁵ ع + ...،

$$\text{جمزم}\,۶ = ۱ + \frac{م^{۲}}{\lfloor ۲}\,\text{جبز}^{۲}\,۶ + \frac{م^{۲}(م^{۲} - ۲^{۲})}{\lfloor ۴}\,\text{جبز}^{۴}\,۶ + \cdots\cdots$$

یہ سلسلے م کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں بشرطیکہ وہ مستدق ہوں جو ہونگے اگر جبز ۶ $\leqslant$ ۱۔ اگر جبز ۶ = ۱ رکھا جائے تو

$$۶ = \text{لوک}\,(۱ + \sqrt{۲})$$

۲۶۵ — جبزم ۶ کے سلسلہ سے ۶ کے لئے ایک سلسلہ جبز ۶ کی قوتوں میں ماخوذ ہوتا ہے جیساکہ دائری تفاعلوں کی صورت میں ظ کیلئے اخذ کیا گیا تھا۔ چنانچہ م کی پہلی قوتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۶ = \text{جبز}\,۶ - \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\,\text{جبز}^{۳}\,۶ + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\times\frac{۱}{۵}\,\text{جبز}^{۵}\,۶ - \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\times\frac{۱}{۷}\,\text{جبز}^{۷}\,۶ + \cdots،$$

یہ سلسلہ مستدق ہے اگر جبز ۶ $\leqslant$ ۱، یا اگر ۶ $\leqslant$ لوک $(۱ + \sqrt{۲})$۔ بالخصوص

$$\text{لوک}\,(۱ + \sqrt{۲}) = ۱ - \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\times\frac{۱}{۵} - \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\times\frac{۱}{۷} + \cdots$$

(326)

زائدی تفاعلوں کی دوریت

۲۶۶ — تفاعلات جمز ۶، جبز ۶ خیالی دور ۲ π خ رکھتے ہیں کیونکہ

$$\text{قو}^{۶ + ۲\pi خ} = \text{قو}^{۶}$$

پس

$$\text{جمز}\,۶ = \text{جمز}\,(۶ + ۲\,خ\,\pi\,ک)،$$
$$\text{جبز}\,۶ = \text{جبز}\,(۶ + ۲\,خ\,\pi\,ک)،$$

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ چونکہ $\text{قو}^{۶ + \pi خ} = -\text{قو}^{۶}$، $\text{قو}^{-(۶ + \pi خ)} = -\text{قو}^{-۶}$

اس لئے

$$\text{جمز}\,(۶ + خ\,\pi) = -\text{جمز}\,۶،$$
$$\text{جبز}\,(۶ + خ\,\pi) = -\text{جبز}\,۶،$$

اس لئے مسز(ع + خ π) = مسزع

یا مسزع کا دَور خ π ہے جو جبزع، جمزع کے دَور کا صرف نصف ہے۔ دلیلوں ۰، ½ π خ، π خ، ³⁄₂ π خ کے جواب میں جبزع، جمزع، مسزع کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:

	۰	½ π خ	π خ	³⁄₂ π خ
جبز	۰	خ	۰	- خ
جمز	۱	۰	-۱	۰
مسز	۰	∞ × خ	۰	∞ × خ
ممز	∞	۰	∞	۰
قطز	۱	∞	-۱	∞
قمز	∞	- خ	∞	خ

جس طرح دائری تفاعل حقیقی دَور کے سادہ ترین ایک دَوری تفاعل ہیں عین اسی طرح زائدی تفاعل خیالی دَور کے سادہ ترین ایک دَوری تفاعل ہیں۔

قائم الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ

۲۶۷ — فرض کرو کہ نیم قاطع محور ۱ اور مرکز و کے ایک قائم الزاویہ زائد پر کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ ق کا مُعیّن ق ل ہے تب قائم الزاویہ زائد کی خاصیت کی رو سے و ل² - ق ل² = ۱²، اب اگر ہم فرض کریں و ل = ۱ جمزع تو ل ق = ۱ جبزع جہاں ہم ع کو مثبت یا منفی لیتے ہیں بموجب اس کے کہ معیّن ل ق مثبت یا منفی طور پر ناپا گیا ہو۔ اب ہم رقبہ ۱ ق پر غور کرتے ہیں جو و۱، و ق اور منحنی کی قوس ۱ ق سے محدود ہے۔ دائری قطاع کی صورت کے مطابق جو دفعہ ۱۲ میں زیر بحث آچکی ہے ہم قوس ۱ ق میں ایک کھلا مستقیم الاضلاع

کثیر الاضلاع ا پ، پ، ... پ ر ... پ ن-۱ ق بناتے ہیں

اور رقبہ و ا ق کے ناپ کی تعریف جو و ا، و ق، اور قوس ا ق سے محدود ہے اس طرح کرتے ہیں کہ وہ بند کثیر الاضلاع و ا پ، پ، ... پ ن-۱ ق و کے رقبہ کے ناپ کی انتہا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو جبکہ اندرونی کثیر الاضلاع (327)

کے ضلعوں کی تعداد غیر معیّن طور پر اس طرح بڑھائی جائے کہ بڑے سے بڑے ضلع کی انتہا صفر کی طرف مستندق ہو بشرطیکہ یہ انتہا، مقررہ شرط کے تحت کثیر الاضلاعوں کے تمام تواتروں کے لئے ایک یگانہ قیمت رکھے۔ فرض کرو کہ نقطہ پ ر کے جواب میں ع کی قیمت ع ر ہے اور فرض کرو کہ زاویہ پ ر و ا کے دائری ناپ کو طہ ر تعبیر کرتا ہے، فرض کرو کہ نقطہ ق کے جواب میں یہ مقداریں ع اور طہ ہیں۔

مس طہ ر = مسز ع ر، اسلئے

جب طہ ر = $\frac{\text{جبز ع ر}}{(\text{جمز ۲ ع ر})^{\frac{1}{2}}}$، اور جم طہ ر = $\frac{\text{جمز ع ر}}{(\text{جمز ۲ ع ر})^{\frac{1}{2}}}$

ان قیمتوں سے اور جب $\text{طہ}_{\text{ر}+۱}$، جم $\text{طہ}_{\text{ر}+۱}$ کی متناظر قیمتوں سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{جب}(\text{طہ}_{\text{ر}+۱}-\text{طہ}_{\text{ر}})=\frac{\text{جبز}(\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{ع}_{\text{ر}})}{(\text{جمز}\,۲\text{ع}_{\text{ر}}\,\text{جمز}\,۲\text{ع}_{\text{ر}+۱})^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\text{اب}\quad \text{و پ}_{\text{ر}}=\text{ا}(\text{جمز}^۲\text{ع}_{\text{ر}}+\text{جبز}^۲\text{ع}_{\text{ر}})^{\frac{۱}{۲}}=\text{ا}\,\text{جمز}^{\frac{۱}{۲}}\,۲\text{ع}_{\text{ر}}$$

$$\text{اور}\quad \text{و پ}_{\text{ر}+۱}=\text{ا}\,\text{جمز}^{\frac{۱}{۲}}\,۲\text{ع}_{\text{ر}+۱}$$

$$\text{اسلئے}\quad \triangle\,\text{و پ}_{\text{ر}}\,\text{پ}_{\text{ر}+۱}=\frac{۱}{۲}\,\text{و پ}_{\text{ر}}\times\text{و پ}_{\text{ر}+۱}\,\text{جب}(\text{طہ}_{\text{ر}+۱}-\text{طہ}_{\text{ر}})$$

$$=\frac{۱}{۲}\,\text{ا}^۲\,\text{جبز}(\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{ع}_{\text{ر}})$$

پس اُس مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ جو و ا، و ق اور ا $\text{پ}_۱\,\text{پ}_۲\ldots\text{پ}_{\text{ن}-۱}$ ق کے ضلعوں سے محدود ہے یہ ہے

$$\frac{۱}{۲}\,\text{ا}^۲\times\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\text{جبز}(\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{ع}_{\text{ر}})$$

جہاں $\text{ع}_۰=۰$، $\text{ع}_{\text{ن}}=\text{ع}$ ۔

یہ ناپ دفعہ ۲۶۳ میں ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے

$$\frac{۱}{۲}\,\text{ا}^۲\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\left\{(\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{ع}_{\text{ر}})+\text{ا}_{\text{ر}}(\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{ع}_{\text{ر}})^۳\,\text{و}^{\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{ع}_{\text{ر}}}\right\}$$

کے مساوی ہے جہاں اعداد $\text{ا}_{\text{ر}}$ سب کے سب $\frac{۱}{۶}$ سے کم ہیں۔

ضلع $\text{پ}_{\text{ر}}\,\text{پ}_{\text{ر}+۱}$ کا طول ہے

$$\text{ا}\left\{(\text{جمز}\,\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{جمز}\,\text{ع}_{\text{ر}})^۲+(\text{جبز}\,\text{ع}_{\text{ر}+۱}-\text{جبز}\,\text{ع}_{\text{ر}})^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

(328)

جو $= ۲\,\text{ا}^{۲}$ جمز $\tfrac{۱}{۲}$ (عر + عر+۱) جمز $\tfrac{۱}{۲}$ (عر+۱ − عر)

نیز عر+۱ − عر > جمز (عر+۱ − عر)، اسلئے نسبت (عر+۱ − عر) \ پ ر پ ر+۱

> ا² جمز $\tfrac{۱}{۲}$ (عر+۱ − عر) \ جمز $\tfrac{۱}{۲}$ (عر + عر+۱) > ا² جمز $\tfrac{۱}{۲}$ ع

اب چونکہ (عر+۱ − عر) \ پ ر پ ر+۱ ایک مستقل عدد سے جو ر پر اور کسی مخصوص کثیر الاضلاع پر منحصر نہیں ہے کم ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کثیر الاضلاعوں کے کسی تواتر کے ایک کثیر الاضلاع میں عددوں عر+۱ − عر میں سے بڑے سے بڑا عدد صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جیسے کثیر الاضلاع کا بڑے سے بڑا ضلع صفر کی طرف مستدق ہو۔ اسلئے کثیر الاضلاع میں ہم فرض کر سکتے ہیں

عر+۱ − عر > کن

ر کی تمام قیمتوں کے لیے، جہاں کن صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جیسے ضلعوں کی تعداد غیر معین طور پر بڑھا دیجاتی ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ،

$\tfrac{۱}{۲}$ ا² مج (ر=۰ سے ن−۱) (عر+۱ − عر)

یا $\tfrac{۱}{۲}$ ا² ع

سے اسقدر کم فرق رکھتا ہے جو

$\tfrac{۱}{۱۲}$ ا² کن² وکن مج (ر=۰ سے ن−۱) (عر+۱ − عر)

یا $\tfrac{۱}{۱۲}$ ا² کن² وکن ع

سے کم ہے اور یہ کن کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے پس

یہ ثابت ہو چکا کہ مقررہ شرط کے تحت کسی تواتر کے مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے ناپ کی یگانہ انتہا $\frac{1}{2}$ اُ^{2} ۶ ہے۔ اسلئے قطاع و ا ق کا رقبہ جو و ا ق اور قائم الزاویہ زائد کی قوس ا ق سے محدود ہے $\frac{1}{2}$ اُ^{2} ۶ ہے۔
کسی قطاع کا رقبہ جسکے سرے ۶، ۶َ سے تعبیر ہوتے ہیں صریحاً $\frac{1}{2}$ اُ^{2}(۶-۶َ) ہے۔
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس قائم الزاویہ کی دوسری شاخ پر کے نقطوں کو تعبیر کرنے میں ۶ کو خ π - ۶ میں بدلنا چاہیئے کیونکہ

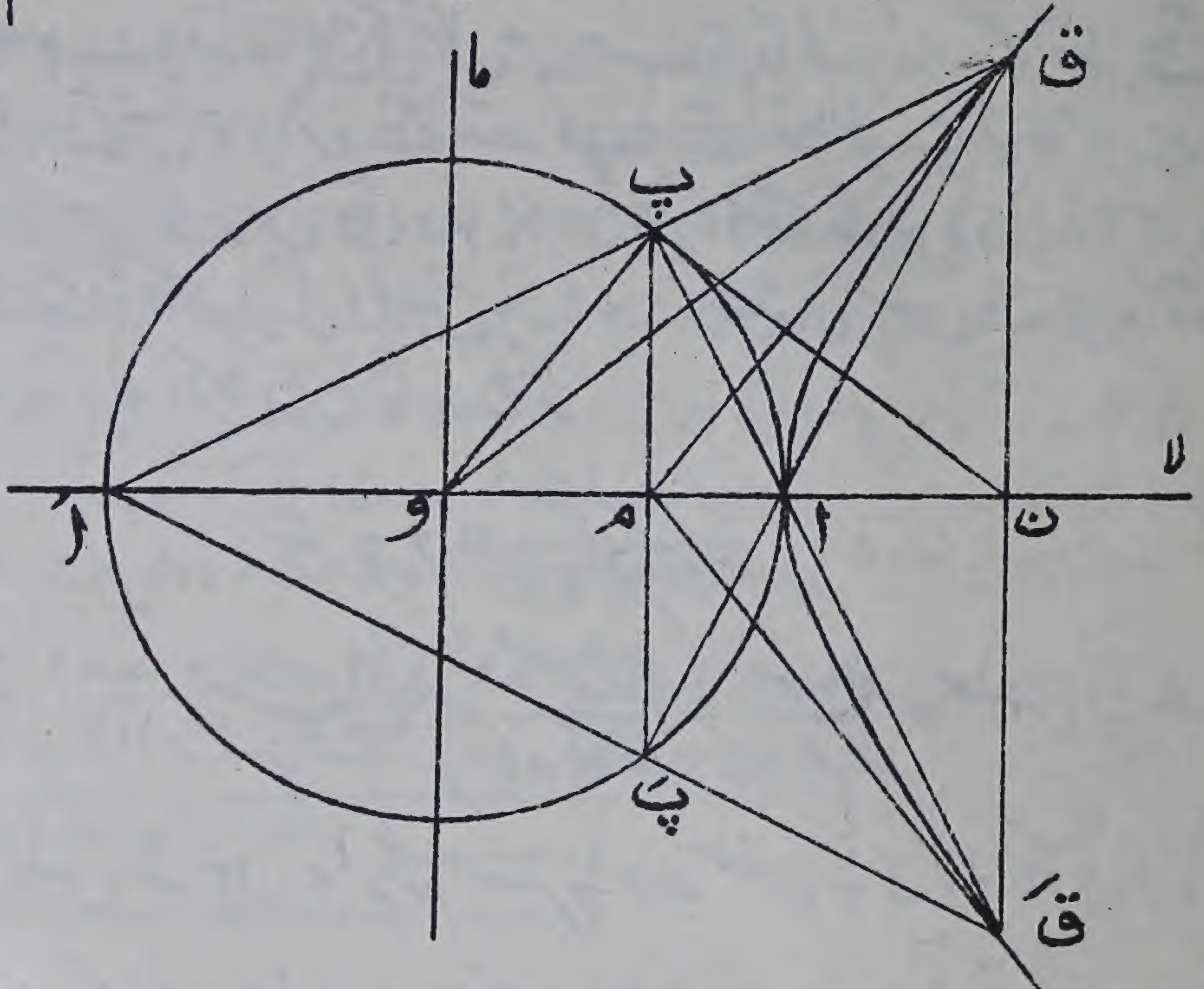
جمز (خ π - ۶) = - جمز ۶ ،

اور جبز (خ π - ۶) = جبز ۶

(329) **۲۶۸** — اگر ہم نصف قطر و ا = اُ کا ایک دائرہ کھینچیں اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ پ لیں جسکا معین م پ ہو[1] تو زاویہ پ و ا کو طہ سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

رقبہ و ا پ = $\frac{1}{2}$ اُ^{2} طہ

فرض کرو کہ پ پر کا مماس پ ن ہے، تب

و م = اُ جم طہ، م پ = اُ جب طہ، ن پ = اُ ٹس طہ، م ا = سہم طہ

[1] اس دفعہ کی شکل گرین ہل کے رسالہ موسومہ "Achapter on the Integ. Calculus" میں سے نقل کیگئی ہے۔

ن سے ن ق ، و ا پر عمود اور ن پ ، کے مساوی کھینچو تب و ن
- ن ق^2 = ا^2 ، اس لئے ق کا طریق نیم محور ا کا ایک قائم الزاویہ
قطع زائد ہے۔ اب قطاع و ا ق کے رقبہ کو $\frac{1}{2}$ ا^2 ء سے تعبیر کرو
تو حسب ثبوت دفعہ سابق و ن = ا جمز ء ، ن ق = ا جبز ء۔
پس ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح دائرہ پر کے کسی نقطہ پ کا معیّن اور فصلہ
علی الترتیب ا جب طہ ، ا جم طہ سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ ا^2 طہ
دائری قطاع و ا پ کا رقبہ ہے عین اسی طرح قائم قطع زائد پر کے نقطہ ق
کا معین اور فصلہ علی الترتیب ا جبز ء ، ا جمز ء سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں
$\frac{1}{2}$ ا^2 ء قطاع و ا ق کا رقبہ ہے۔ اس طرح زائدی جیب اور جیب التمام
قائم زائد کے حوالے سے ایسی خاصیت رکھتے ہیں جو دائرہ کے
حوالے سے جیب اور جیب التمام کی خاصیت کے بالکل مماثل ہے۔
یہی وجہ ہے کہ قبل الذکر تفاعلوں کو زائدی تفاعل کہا جاتا ہے عین ایسے
ہی جیسے کہ بعد الذکر تفاعلوں کو دائری تفاعل کہتے ہیں۔

۲۶۹۔ دفعہ سابق کی شکل میں جب ہم قائم زائد کے نقطہ ق پر
غور کرتے ہیں جو دائرہ کے نقطہ پ کے متناظر ہے تو حاصل ہوتا ہے
مس طہ = ن ق = ا جبز ء اور ، ا قط طہ = و ن = ا جمز ء ،
اسلئے متناظر نقطوں کی دلیلیں طہ ، ء ، رشتوں مس طہ = جبز ء ، قط طہ
= جمز ء کو پورا کرتی ہیں۔ اب چونکہ

$$\text{مسز}\ \tfrac{1}{2}\,ء = \frac{\text{جبز}\ ء}{1 + \text{جمز}\ ء}$$

اسلئے

$$\text{مسز}\ \tfrac{1}{2}\,ء = \frac{\text{مس طہ}}{1 + \text{قط طہ}} = \frac{\text{جب طہ}}{1 + \text{جم طہ}} = \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}$$

یا دلیلیں طہ اور ء ، رشتہ مسز $\frac{1}{2}$ ء = مس $\frac{1}{2}$ طہ کو پورا کرتی ہیں۔

چونکہ △ و ق م > قطاع و ا ق > △ و ا ق

(330)

اسلئے مسز ع < ع < جبز ع

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مسز ع / ع ، جبز ع / ع کی انتہائیں جبکہ ع کو لا انتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک اکائی ہے کیونکہ جمز ۰ = ۱ -

۲۷۰ - چونکہ و = جمز ع + جبز ع

= قط طہ + مس طہ

اسلئے ع = لوگ و (قط طہ + مس طہ)

= لوگ و مس (¼ π + ½ طہ)

دلیل طہ کو مختلف نام دئے جا چکے ہیں ، چنانچہ کیلے (Cayley) اس کو ع کا گوڈرمینی (Guder mannian) تفاعل کہتا ہے اور اسے گڈ ع (gd u) سے تعبیر کرتا ہے ، اس طرح طہ = گڈ ع ، ع = گڈ^-۱ طہ = لوگ مس (¼ π + ½ طہ) - یہ نام گڈرمین (Gudermann) کے اعزاز میں دیا گیا تھا جس نے اسکو ع کے طول بلد (Longitude) سے موسوم کیا تھا۔ لیمبرٹ[۱] (Lambert) نے طہ کو علوی (Transcendent) زاویہ کہا اور ہوئیل[۲] (Houel) نے ع کا زائدی حیطہ کہا اور لکھا حطز ع (amhu)۔ صفر درجے سے ۹۰° تک .۵ کے وقفوں سے طہ کی قیمتوں کے لئے لوگ مس (¼ π + ½ طہ) کی قیمتوں کی ایک جدول جسمیں یہ قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک دی گئی ہیں لیجنڈر (Legendre) کی کتاب

(Théorie des fonctions Elliptiques, vol. II Table IV.)

میں ملیگی - اس باب کے آخر میں جو جدول ایک درجہ کے وقفوں سے دی گئی ہے اسکو لیجنڈر کی جدول سے پروفیسر کیلے[۳] نے اخذ کیا تھا۔

---

[۱] دیکھو (Crelle's journal, 1833.)

[۲] دیکھو (Théorie des fonctions complexes)

[۳] دیکھو (Quarterly journal, vol. xx.p.220)

(331) اِس جدول سے ء کے زائدی تفاعلوں کی عددی قیمتیں رشتوں

جنزء = مس طہ، جمزء = قط طہ

کے ذریعہ زاویوں کے طبعی مماسوں یا قاطعوں کی جدول استعمال کرکے معلوم کرسکتے ہیں۔

زائدی تفاعلوں اور انکے اطلاقات کے موضوع پر مزید معلومات کی خواہش ہو تو دیکھو لائے سانٹ (Laisant) کا "Essai sur les Fonctions Hyperboliques" in the Memoires de la Societe des Sciences de Bordeaux, vol. x., اور نیز حسب ذیل مقالات

"Die hyperbolischen Functionen" by E. Heis,

"Die Lehre von den gewohnlichen und verallgemeinerten Hyperbol-funktionen" by Gunther.

ملتف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کیلئے جملے

۱۷۲ — ملتف دلیل کے دائری تفاعلوں کو زائدی تفاعلوں کی ترقیم استعمال کرکے آسانی کے ساتھ شکل عہ + خ بہ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں عہ اور بہ حقیقی مقداریں ہیں۔

چنانچہ جب (لا + خ ما) = جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما

اسلئے جب (لا + خ ما) = جب لا جمز ما + خ جم لا جنز ما، ....(۹)

اسی طرح جم (لا + خ ما) = جم لا جمز ما − خ جب لا جنز ما، ....(۱۰)

نیز مس (لا + خ ما) = $\frac{\text{جب (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)}}{\text{جم (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)}}$

= $\frac{\text{جب ۲ لا + جب ۲ خ ما}}{\text{جم ۲ لا + جم ۲ خ ما}}$

اسلئے مس (لا + خ ما) = $\frac{\text{جب ۲ لا + خ جنز ۲ ما}}{\text{جم ۲ لا + جمز ۲ ما}}$، ....(۱۱)

ملتف دلیلوں کے مقلوب دائری تفاعل

۲۷۲ — ہم اول تفاعل $\text{جب}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما})$ پر غور کرینگے ۔ فرض کرو
$\text{جب}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{عہ} + \text{خ بہ}$ ، تب

$$\text{لا} + \text{خ ما} = \text{جب}(\text{عہ} + \text{خ بہ}) = \text{جب عہ جمز بہ} + \text{خ جم عہ جنز بہ}$$

یا $\text{لا} = \text{جب عہ جمز بہ}$ ، $\text{ما} = \text{جم عہ جنز بہ}$

اسلئے بہ کو معلوم کرنیکی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{جمز}^{۲}\,\text{بہ}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{جنز}^{۲}\,\text{بہ}} = ۱$$

یا
$$\text{لا}^{۲}(\text{جمز}^{۲}\,\text{بہ} - ۱) + \text{ما}^{۲}\,\text{جمز}^{۲}\,\text{بہ} = \text{جمز}^{۲}\,\text{بہ}\,(\text{جمز}^{۲}\,\text{بہ} - ۱) \quad (332)$$

اگر ہم $\text{جمز}^{۲}\,\text{بہ}$ کی یہ دو درجی مساوات حل کریں تو

$$\text{جمز}^{۲}\,\text{بہ} = \tfrac{۱}{۲}(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۱) \pm \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۱)^{۲} - ۴\,\text{لا}^{۲}}$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{جمز بہ} = \pm\tfrac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۱} \pm \tfrac{۱}{۲}\sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۱}$$

اور چونکہ جمز بہ مثبت ہے اسلئے

$$\text{جمز بہ} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} \pm \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}-۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}}$$

اگر لا مثبت ہے ۔ جمز بہ کی اس قیمت کے جواب میں جب عہ کی قیمت ہے

$$\text{لا} \backslash \text{جمز بہ} \;\text{یا}\; \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} \mp \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}-۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}}$$

اب چونکہ $\text{جمز بہ} > ۱ > \text{جب عہ}$ اسلئے

$$\text{جمز بہ} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} + \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}-۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} = \text{ی}\,،$$

$$\text{جب ع} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}+1)^2+\text{ما}^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}-1)^2+\text{ما}^2} = \text{و}،$$

پس جمز بہ، جب ع کی قیمتیں مندرجہ صدر ہیں خواہ لا مثبت ہو یا منفی۔

دو درجی جمز بہ = ع سے حاصل ہوتا ہے بہ = ± لوک $\{ع+\sqrt{ع^2-1}\}$،

اسلئے $\text{جب}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ک}\pi + (-1)^{\text{ک}}\,\text{جب}^{-1}\text{و} \pm \text{خ لوک}\{ع+\sqrt{ع^2-1}\}$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے اور جب^{-1}و، ع کی صدر قیمت ہے جو اس شرط جب ع = و کو پورا کرتی ہے۔ مبہم علامت کی تعیین کیلئے رکھو لا = ۰. تو $\text{جب}^{-1}\text{خ ما} = \text{ک}\pi \pm \text{خ لوک}(\sqrt{1+\text{ما}^2}+\text{ما})$، اسلئے

$$\text{خ ما} = \pm\ \text{جم ک}\pi\ \text{جب}\left[\text{خ لوک}(\sqrt{1+\text{ما}^2}+\text{ما})\right]$$

$$= \pm(-1)^{\text{ک}}\frac{1}{2\text{خ}}\left\{\text{ما}+\sqrt{\text{ما}^2+1} - \frac{1}{\text{ما}+\sqrt{\text{ما}^2+1}}\right\} = \pm(-1)^{\text{ک}}\,\text{خ ما}$$

اسلئے مبہم علامت وہی ہونی چاہئے جو $(-1)^{\text{ک}}$ کی ہے، یا

$$\text{جب}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ک}\pi + (-1)^{\text{ک}}\,\text{جب}^{-1}\text{و} + (-1)^{\text{ک}}\,\text{خ لوک}\{ع+\sqrt{ع^2-1}\} \quad \ldots(12)$$

جہاں $ع = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}+1)^2+\text{ما}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}-1)^2+\text{ما}^2}$

اور $\text{و} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}+1)^2+\text{ما}^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}-1)^2+\text{ما}^2}$

اگر ہم $\text{جب}^{-1}\text{و} + \text{خ لوک}\{ع+\sqrt{ع^2-1}\}$ کو $\text{جب}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$ کی صدر قیمت خیال کریں اور اسے $\text{جب}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$ سے تعبیر کریں تو عام قیمت ہے

$$\text{ک}\pi + (-1)^{\text{ک}}\,\text{جب}^{-1}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

جو وہی جملہ ہے جو حقیقی دلیلوں کے لئے حاصل ہوا تھا۔
ایک خاص صورت لا > ۱، ما = ۰ کی ہے، اس صورت میں
ع = لا، و = ۱ اور جب‾۱ لا کی صدر قیمت ½ π + خ لوک {لا + √(لا² - ۱)}
ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ جب‾۱ لا کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہو سکتی جبکہ لا > ۱۔

(333) ۲۷۳ — ثانیاً فرض کرو کہ جم‾۱ (لا + خ ما) = عہ + خ بہ تو پہلی صورت کی طرح حاصل ہوتا ہے

لا = جم عہ جمز بہ، ما = ـ جب عہ جبز بہ

و حسب سابق معلوم ہوتا ہے کہ

جمز بہ = ½ √((لا + ۱)² + ما²) + ½ √((لا - ۱)² + ما²) = ع،

جم عہ = ½ √((لا + ۱)² + ما²) - ½ √((لا - ۱)² + ما²) = و،

اس لئے جم‾۱ (لا + خ ما) = ۲ک π ± جم‾۱ و ± خ لوک {ع + √(ع² - ۱)}

آخری رقم کی علامت کی تعئین کے لئے رکھو لا = ۰ تو

خ ما = جم [± ½ π ± خ لوک (ما + √(ما² + ۱))] = ∓ جب {± خ لوک (ما + √(ما² + ۱))} = (∓) (± خ ما)

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوسری مبہم علامت پہلی سے مختلف ہونی چاہئے، یا

جم‾۱ (لا + خ ما) = ۲ک π ± {جم‾۱ و - خ لوک (ع + √(ع² - ۱))} ... (۱۳)

اگر جم‾۱ و - خ لوک (ع + √(ع² - ۱)) سے جم‾۱ (لا + خ ما) کی صدر قیمت تعبیر ہو تو عام قیمت ۲ک π ± جم‾۱ (لا + خ ما) ہے۔

۲۷۴ — فرض کرو کہ مس⁻¹ (لا + خ ما) = عہ + خ بہ، تب

$$لا + خ ما = \frac{جب ۲ عہ + خ جبز ۲ بہ}{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}$$

اسلئے $$لا = \frac{جب ۲ عہ}{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}،\quad ما = \frac{جبز ۲ بہ}{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}،$$

اسلئے $$لا^۲ + ما^۲ = \frac{جب^۲ ۲ عہ + جبز^۲ ۲ بہ}{(جم ۲ بہ + جمز ۲ بہ)^۲} = \frac{جمز^۲ ۲ بہ - جم^۲ ۲ عہ}{(جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ)^۲}$$

$$= \frac{جمز ۲ بہ - جم ۲ عہ}{جمز ۲ بہ + جم ۲ عہ}$$

یا $$۱ - لا^۲ - ما^۲ = \frac{۲ جم ۲ عہ}{جمز ۲ بہ + جم ۲ عہ}،$$

اور $$۱ + لا^۲ + ما^۲ = \frac{۲ جمز ۲ بہ}{جمز ۲ بہ + جم ۲ عہ}$$

اسلئے $$مس ۲ عہ = \frac{۲ لا}{۱ - لا^۲ - ما^۲}،\ اور\ مسز ۲ بہ = \frac{۲ ما}{۱ + لا^۲ + ما^۲}$$

اب چونکہ $$\frac{ق^{۲ بہ} - ق^{-۲ بہ}}{ق^{۲ بہ} + ق^{-۲ بہ}} = \frac{۲ ما}{۱ + لا^۲ - ما^۲}$$

اسلئے $$ق^{۴ بہ} = \frac{لا^۲ + (ما + ۱)^۲}{لا^۲ + (ما - ۱)^۲}$$

یا $$بہ = \frac{۱}{۴} لوک \left\{ \frac{لا^۲ + (ما + ۱)^۲}{لا^۲ + (ما - ۱)^۲} \right\}$$

اسلئے مس⁻¹ (لا + خ ما) کی قیمتیں

مس$^{-1}$ (لا + خ ما) = ک π + ½ مس$^{-1}$ $\frac{۲\ لا}{۱ - لا^۲ - ما^۲}$

+ ¼ خ لوک $\left\{ \frac{لا^۲ + (ما + ۱)^۲}{لا^۲ + (ما - ۱)^۲} \right\}$، ......(۱۴)

سے ملتی ہیں۔

مقلوب زائدی تفاعل

۲۷۵۔ اگر جبزعہ = ی تو عہ کو ی کی مقلوب زائدی جیب کہتے ہیں اور اسے جبز$^{-1}$ ی سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسی ہی تعریف جمز$^{-1}$ ی اور مسز$^{-1}$ ی کے لئے ہے۔

(334) اگر ی = جبزعہ = - خ جب خ عہ تو خ ی = جب خ عہ یا عہ = $\frac{۱}{خ}$ جب$^{-1}$ (خ ی)

اسی طرح اگر ی = جمزعہ = جم خ عہ تو عہ = $\frac{۱}{خ}$ جم$^{-1}$ ی، نیز اگر ی = مسزعہ

تو عہ = $\frac{۱}{خ}$ مس$^{-1}$ (خ ی)۔ پس مقلوب زائدی تفاعل مقلوب

دائری تفاعلوں کی رقوم میں ان مساواتوں

جبز$^{-1}$ ی = - خ جب$^{-1}$ (خ ی)،

جمز$^{-1}$ ی = - خ جم$^{-1}$ (ی)،

مسز$^{-1}$ ی = - خ مس$^{-1}$ (خ ی)

سے بیان ہو سکتے ہیں۔

۲۷۶۔ ان جملوں کے ذریعہ جو ہم نے ملتف دلیل کے مقلوب دائری تفاعلوں کے لئے معلوم کئے ہیں مقلوب زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ لیکن ہم ان کو بلاواسطہ ہی معلوم کرینگے۔

(۱) اگر ی = جبزعہ تو و^{عہ} - و$^{-عہ}$ = ۲ ی - اسکو و^{عہ} کی قیمت

معلوم کرنیکے لئے دو درجی کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{ع}} = \text{ی} \pm \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}$$

اس لئے $\text{ع} = ۲\,\text{خ ک}\,\pi + \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$

یا $\text{ع} = ۲\,\text{خ ک}\,\pi + \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} - \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$

ع کی یہ دونوں قیمتیں جملہ $\text{خ ک}\,\pi + (-۱)^{\text{ک}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$ میں شامل ہیں۔

پس جیبز$^{-۱}$ یا کی عام قیمت $\text{خ ک}\,\pi + (-۱)^{\text{ک}}\, \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$ ہے اور اسکی صدر قیمت $\text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$ ہے۔ اس صدر قیمت کو بالعموم جیبز$^{-۱}$ی سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲) اگر ی = جمز ع تو $\text{و}^{\text{ع}} + \text{و}^{-\text{ع}} = ۲\,\text{ی}$، اسلئے

$\text{و}^{\text{ع}} = \text{ی} \pm \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}$، اس طرح $\text{ع} = ۲\,\text{خ ک}\,\pi \pm \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}\right)$

پس جمز$^{-۱}$ی کی عام قیمت $۲\,\text{خ ک}\,\pi \pm \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}\right)$ ہے، اسکی صدر قیمت جو بالعموم جمز$^{-۱}$ی سے تعبیر کیجاتی ہے $\text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}\right)$ ہے۔

(۳) اگر ی = مسنز ع تو $\dfrac{\text{و}^{۲\text{ع}} - ۱}{\text{و}^{۲\text{ع}} + ۱} = \text{ی}$، یا $\text{و}^{۲\text{ع}} = \dfrac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}$

اسلئے $\text{ع} = \text{خ ک}\,\pi + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}} \left(\dfrac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}\right)$، یہ مسنز$^{-۱}$ی کی عام قیمت ہے اور اسکی صدر قیمت $\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}} \left(\dfrac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}\right)$ ہے۔

(۴) اسی طرح ممز$^{-1}$ی، قطز$^{-1}$ی، قمز$^{-1}$ی کی صدر قیمتوں کے لئے علی الترتیب جملے حاصل ہوتے ہیں

$\frac{1}{2}$ لوک$_{و}$ $\left(\frac{ی+1}{ی-1}\right)$، لوک$_{و}$ $\frac{1+\sqrt{1-ی^2}}{ی}$، لوک$_{و}$ $\frac{1+\sqrt{1+ی^2}}{ی}$

(335)

کعبی مساواتوں کا حل

۲۷۷ — دفعہ ۱۷۷ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب کعبی لا^3 + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں اور ق منفی ہو تو اصلیں ہیں

$\sqrt{-\frac{4}{3}ق} \times$ جب طہ، $\sqrt{-\frac{4}{3}ق} \times$ جب (طہ + $\frac{2}{3}\pi$)، $\sqrt{-\frac{4}{3}ق}$ $\times$ جب (طہ + $\frac{4}{3}\pi$)

جہاں، جب ۳ طہ = $\left(-\frac{27ر^2}{4ق^3}\right)^{\frac{1}{2}}$۔ اب ہم یہ دکھائینگے کہ کعبی کو اس صورت میں کس طرح حل کرنا چاہئے جبکہ اسکی دو اصلیں خیالی ہوں اس صورت میں شرط

$$۲۷ ر^2 + ۴ ق^3 > ۰$$

پوری ہوتی ہے۔

(۱) ق کو مثبت فرض کرو اور کعبی

$$۴ \text{ جبز}^3 ء + ۳ \text{ جبز} ء = \text{جبز} ۳ ء$$

پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ا جبز ء، تب لا اس مساوات

$$لا^3 + \frac{3}{4} ا^2 لا - \frac{1}{4} ا^3 \text{ جبز} ۳ ء = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔ یہ کعبی، کعبی لا^3 + ق لا + ر = ۰ پر منطبق ہوگا اگر

ق = ۳/۴ ا۲، ر = - ۱/۴ ا۳ جبز ۳ ع یا جبز ۳ ع = - ۴ (۲۷ ر۲ / ۶۴ ق۳)^۱/۲

اب کعبی ۴ جبز۳ ع + ۳ جبز ع = جبز ۳ ع کی اصلیں ہیں

جبز ع، جبز (ع + ۲/۳ π خ) جبز (ع + ۴/۳ π خ)

اسلئے کعبی لا۳ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں ہیں

√(۴/۳ ق) جبز ع، √(۴/۳ ق) جبز (ع + ۲/۳ π خ)، √(۴/۳ ق) جبز (ع + ۴/۳ π خ)

یا √(۴/۳ ق) جبز ع، √(۱/۳ ق) (- جبز ع ± خ √۳ جمز ع)

جہاں جبز ۳ ع = - ۱/۲ (۲۷ ر۲ / ق۳)^۱/۲ - اگر ق اور ر کی عددی قیمتیں دی گئی ہیں تو عدد ۳ ع کو زائدی جیوب کی جدول سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر انہی جدولوں سے جبز ع، جمز ع معلوم کئے جاتے ہیں۔ پس اس طرح اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق منفی ہو تو مساوات

۴ جمز۳ ع - ۳ جمز ع = جمز ۳ ع

پر غور کرو۔ سابقہ صورت کی طرح یہ معلوم ہوگا کہ اگر ق = - ۳/۴ ا۲، ر = - ۱/۴ ا۳ جمز ۳ ع تو وہ کعبی جو ا جمز ع سے پورا ہوتا ہے لا۳ + ق لا + ر = ۰ ہے۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ہیں

√(- ۴/۳ ق) جمز ع، √(- ۴/۳ ق) جمز (ع + ۲/۳ π خ)، √(- ۴/۳ ق) جمز (ع + ۴/۳ π خ)

یا √(- ۴/۳ ق) جمزء، √(- ۱/۳ ق) (- جمزء ± √۳ جبزء)

جہاں جمز۳ ۶ = - ½ (- ۲۷ ر²/ق³)^½ - پس حسب صورت سابقہ ہم کعبی کی اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنیکے لئے جبکہ ق اور ر دیے گئے ہوں زائدی تفاعلوں کی جدولیں استعمال کر سکتے ہیں۔

(336)

۲۷۸ — ط کی دی ہوئی قیمتوں کے جواب میں ۶ کی قیمتوں کی جدول

ط		۶ = لوکو مس (¼π + ½ط)	ط		۶ = لوکو مس (¼π + ½ط)
°۰	ء۰	ء۰	°۱۵	ء۲۶۱۷۹۹۴	ء۲۶۴۸۴۲۲
°۱	ء۰۱۷۴۵۳۳	ء۰۱۷۴۵۴۲	°۱۶	ء۲۷۹۲۵۲۷	ء۲۸۲۹۵۴۵
°۲	ء۰۳۴۹۰۶۶	ء۰۳۴۹۱۳۷	°۱۷	ء۲۹۶۷۰۶۰	ء۳۰۱۱۵۷۷
°۳	ء۰۵۲۳۵۹۹	ء۰۵۲۳۸۳۸	°۱۸	ء۳۱۴۱۵۹۳	ء۳۱۹۴۵۸۳
°۴	ء۰۶۹۸۱۳۲	ء۰۶۹۸۶۹۹	°۱۹	ء۳۳۱۶۱۲۶	ء۳۳۷۸۶۲۹
°۵	ء۰۸۷۲۶۶۵	ء۰۸۷۳۷۷۴	°۲۰	ء۳۴۹۰۶۵۹	ء۳۵۶۳۷۸۵
°۶	ء۱۰۴۷۱۹۸	ء۱۰۴۹۱۱۷	°۲۱	ء۳۶۶۵۱۹۱	ء۳۷۵۰۱۲۱
°۷	ء۱۲۲۱۷۳۰	ء۱۲۲۴۷۸۱	°۲۲	ء۳۸۳۹۷۲۴	ء۳۹۳۷۷۱۰
°۸	ء۱۳۹۶۲۶۳	ء۱۴۰۰۸۲۲	°۲۳	ء۴۰۱۴۲۵۷	ء۴۱۲۶۶۲۶
°۹	ء۱۵۷۰۷۹۶	ء۱۵۷۷۲۹۶	°۲۴	ء۴۱۸۸۷۹۰	ء۴۳۱۶۹۴۷
°۱۰	ء۱۷۴۵۳۲۹	ء۱۷۵۴۲۵۸	°۲۵	ء۴۳۶۳۳۲۳	ء۴۵۰۸۷۵۳
°۱۱	ء۱۹۱۹۸۶۲	ء۱۹۳۱۷۶۶	°۲۶	ء۴۵۳۷۸۵۶	ء۴۷۰۲۱۲۷
°۱۲	ء۲۰۹۴۳۹۵	ء۲۱۰۹۸۶۷	°۲۷	ء۴۷۱۲۳۸۹	ء۴۸۹۷۱۵۴
°۱۳	ء۲۲۶۸۹۲۸	ء۲۲۸۸۶۵۰	°۲۸	ء۴۸۸۶۹۲۲	ء۵۰۹۳۹۲۳
°۱۴	ء۲۴۴۳۴۶۱	ء۲۴۶۸۱۴۵	°۲۹	ء۵۰۶۱۴۵۵	ء۵۲۹۲۵۲۷

ط		ع = لوکو مس $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ط$)$
°۳۰	۰٫۵۲۳۵۹۸۸	۰٫۵۴۹۳۰۶۱
°۳۱	۰٫۵۴۱۰۵۲۱	۰٫۵۶۹۵۶۲۷
°۳۲	۰٫۵۵۸۵۰۵۴	۰٫۵۹۰۰۳۲۹
°۳۳	۰٫۵۷۵۹۵۸۷	۰٫۶۱۰۷۲۷۵
°۳۴	۰٫۵۹۳۴۱۱۹	۰٫۶۳۱۶۵۸۱
°۳۵	۰٫۶۱۰۸۶۵۲	۰٫۶۵۲۸۳۶۶
°۳۶	۰٫۶۲۸۳۱۸۵	۰٫۶۷۴۲۷۵۵
°۳۷	۰٫۶۴۵۷۷۱۸	۰٫۶۹۵۹۸۸۰
°۳۸	۰٫۶۶۳۲۲۵۱	۰٫۷۱۷۹۸۸۰
°۳۹	۰٫۶۸۰۶۷۸۴	۰٫۷۴۰۲۹۰۱
°۴۰	۰٫۶۹۸۱۳۱۷	۰٫۷۶۲۹۰۹۵
°۴۱	۰٫۷۱۵۵۸۵۰	۰٫۷۸۵۸۶۳۰
°۴۲	۰٫۷۳۳۰۳۸۳	۰٫۸۰۹۱۶۷۲
°۴۳	۰٫۷۵۰۴۹۱۶	۰٫۸۳۲۸۴۰۶
°۴۴	۰٫۷۶۷۹۴۴۹	۰٫۸۵۶۹۰۲۶
°۴۵	۰٫۷۸۵۳۹۸۲	۰٫۸۸۱۳۷۳۶
°۴۶	۰٫۸۰۲۸۵۱۵	۰٫۹۰۶۲۷۵۵
°۴۷	۰٫۸۲۰۳۰۴۷	۰٫۹۳۱۶۳۱۶
°۴۸	۰٫۸۳۷۷۵۸۰	۰٫۹۵۷۴۶۶۹
°۴۹	۰٫۸۵۵۲۱۱۳	۰٫۹۸۳۸۰۷۹
°۵۰	۰٫۸۷۲۶۶۴۶	۱٫۰۱۰۶۸۳۲
°۵۱	۰٫۸۹۰۱۱۷۹	۱٫۰۳۸۱۲۳۵
°۵۲	۰٫۹۰۷۵۷۱۲	۱٫۰۶۶۱۶۱۷

ط		ع = لوکو مس $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ط$)$
°۵۳	۰٫۹۲۵۰۲۴۵	۱٫۰۹۴۸۳۳۵
°۵۴	۰٫۹۴۲۴۷۷۸	۱٫۱۲۴۱۷۷۲
°۵۵	۰٫۹۵۹۹۳۱۱	۱٫۱۵۴۲۳۴۶
°۵۶	۰٫۹۷۷۳۸۴۴	۱٫۱۸۵۰۵۰۷
°۵۷	۰٫۹۹۴۸۳۷۷	۱٫۲۱۶۶۷۴۸
°۵۸	۱٫۰۱۲۲۹۱۰	۱٫۲۴۹۱۶۰۶
°۵۹	۱٫۰۲۹۷۴۴۳	۱٫۲۸۲۵۶۶۸
°۶۰	۱٫۰۴۷۱۹۷۶	۱٫۳۱۶۹۵۷۹
°۶۱	۱٫۰۶۴۶۵۰۸	۱٫۳۵۲۴۰۳۸
°۶۲	۱٫۰۸۲۱۰۴۱	۱٫۳۸۸۹۸۶۰
°۶۳	۱٫۰۹۹۵۵۷۴	۱٫۴۲۶۷۸۸۲
°۶۴	۱٫۱۱۷۰۱۰۷	۱٫۴۶۵۹۰۸۳
°۶۵	۱٫۱۳۴۴۶۴۰	۱٫۵۰۶۴۵۴۲
°۶۶	۱٫۱۵۱۹۱۷۳	۱٫۵۴۸۵۴۷۲
°۶۷	۱٫۱۶۹۳۷۰۶	۱٫۵۹۲۳۲۳۷
°۶۸	۱٫۱۸۶۸۲۳۹	۱٫۶۳۷۹۳۸۷
°۶۹	۱٫۲۰۴۲۷۷۲	۱٫۶۸۵۵۶۸۵
°۷۰	۱٫۲۲۱۷۳۰۵	۱٫۷۳۵۴۱۵۲
°۷۱	۱٫۲۳۹۱۸۳۸	۱٫۷۸۷۷۱۲۰
°۷۲	۱٫۲۵۶۶۳۷۱	۱٫۸۴۲۷۳۰۰
°۷۳	۱٫۲۷۴۰۹۰۴	۱٫۹۰۰۷۸۶۷
°۷۴	۱٫۲۹۱۵۴۳۶	۱٫۹۶۲۲۵۷۲
°۷۵	۱٫۳۰۸۹۹۶۹	۲٫۰۲۷۵۸۹۴

	ط	ع = لوکو مس $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ط$)$		ط	ع = لوکو مس $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ط$)$
°۷۶	۱٫۳۲۶۴۵۰۲	۲٫۰۹۷۳۲۴۰	°۸۴	۱٫۴۶۶۰۷۶۶	۲٫۹۴۸۷۰۰۲
°۷۷	۱٫۳۴۳۹۰۳۵	۲٫۱۷۲۱۲۱۸	°۸۵	۱٫۴۸۳۵۲۹۹	۳٫۱۳۱۳۰۱۳
°۷۸	۱٫۳۶۱۳۵۶۸	۲٫۲۵۲۸۰۲۷	°۸۶	۱٫۵۰۰۹۸۳۲	۳٫۳۵۴۶۷۳۵
°۷۹	۱٫۳۷۸۸۱۰۱	۲٫۳۴۰۴۰۰۷	°۸۷	۱٫۵۱۸۴۳۶۴	۳٫۶۴۲۵۳۳۴
°۸۰	۱٫۳۹۶۲۶۳۴	۲٫۴۳۶۲۴۶۰	°۸۸	۱٫۵۳۵۸۸۹۷	۴٫۰۴۸۱۲۵۴
°۸۱	۱٫۴۱۳۷۱۶۷	۲٫۵۴۲۰۹۰۴	°۸۹	۱٫۵۵۳۳۴۳۰	۴٫۷۴۱۳۴۸۸
°۸۲	۱٫۴۳۱۱۷۰۰	۲٫۶۶۰۳۰۶۱	°۹۰	۱٫۵۷۰۷۹۶۳	∞
°۸۳	۱٫۴۴۸۶۲۳۳	۲٫۷۹۴۲۱۹۰			

(337)

سولھویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

۸ جبزن لا جبز^2 لا = ۲ جبز (ن + ۲) لا − ۴ جبزن لا + ۲ جبز (ن − ۲) لا

۲۔ اگر جم (ع + خ بہ) = جم فہ + خ جب فہ تو ثابت کرو کہ جب فہ = ± جب^2 ع

= ± جبز^2 بہ

۳۔ اگر جم (ط + خ فہ) جم (ع + خ بہ) = ۱ تو ثابت کرو کہ

مسز^2 فہ جمز^2 بہ = جب^2 ع، اور مسز^2 بہ جمز^2 فہ = جب^2 ط

۴۔ اگر مس ما = مس ع مسز بہ، مس ی = مم ع مسز بہ تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جبز ۲ بہ قمز ۲ ع

۵۔ جبو (ع + خ بہ) کو شکل ا + خ ب میں تحویل کرو۔

۶ — اگر لوک و جب (طہ + خ فہ) = عہ + خ بہ

تو ثابت کرو کہ ۲ جم ۲ طہ = ۲ جمز ۲ فہ − ۴ و^۲عہ

اور جم (طہ − بہ) = و^۲فہ جم (طہ + بہ)

۷ — اگر مس (لا + خ ما) = جب (۶ + خ و)

تو ثابت کرو کہ ممز و جبز ۲ ما = مم ۶ جب ۲ لا

۸ — {جم (طہ + خ فہ) + خ جب (طہ − خ فہ)}^{عہ + خ بہ} کو شکل

ا + خ ب میں بیان کرو۔

۹ — ثابت کرو کہ

مس^{-۱} (مس ۲ طہ + مسز ۲ فہ / مس ۲ طہ − مسز ۲ فہ) + مس^{-۱} (مس طہ − مسز فہ / مس طہ + مسز فہ) = مس^{-۱} (مم طہ ممز فہ)

۱۰ — اگر ۶ = جم عہ − ۱/۳ جم ۳ عہ + ۱/۵ جم ۵ عہ − ...،

و = جب عہ − ۱/۳ جب ۳ عہ + ۱/۵ جب ۵ عہ ...،

تو ثابت کرو کہ ۶ = ۱/۴ π جبکہ ۰ ≥ عہ > ۱/۲ π، اور ممز ۲ و = قط عہ

۱۱ — ثابت کرو کہ لا متناہی سلسلہ

۱ + جم ۴ طہ / |۴ + جم ۸ طہ / |۸ + جم ۱۲ طہ / |۱۲ + ...

کا مجموعہ ۱/۲ {جم (جم طہ) جمز (جب طہ) + جم (جب طہ) جمز (جم طہ)} ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ

Σ_{ن = ۰}^{ن = ∞} (−۱)^ن / |۲ن · جب (۲ م + ۱) ن طہ / جب ن طہ

= ۲ Σ_{پ = ۱}^{پ = م} {جم (جم پ طہ) جمز (جب پ طہ)} + جم عہ

لا ایک حقیقی عدد ہو مستدق نہیں ہوتا اگر ف $\leqslant$ ۱، لیکن مستدق ہوتا ہے اگر ف > ۱- کیونکہ Σ $\frac{۱}{ن^ف}$ متسع ہے جبکہ ف $\leqslant$ ۱ اور مستدق ہے جبکہ ف > ۱-

حاصل ضرب $(۱ + \frac{ی}{۱})(۱ + \frac{ی}{۲}) \ldots (۱ + \frac{ی}{ن}) \ldots$ یقیناً متسع ہے

اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو، اور یہ حاصل ضرب مستدق نہیں ہوتا اگر ی کا حقیقی حصہ صفر ہو- جب، ی کا حقیقی حصہ منفی ہو تو حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے- کیونکہ

لوک$_و$ $(۱ + \frac{ی}{ن}) = \frac{ی}{ن} - \frac{ی^۲}{۲ن^۲}(۱ + ضن)$ جہاں |ضن| اُن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لئے ایک مستقل عدد سے کم ہے، اسلئے Σ لوک$_و$ $(۱ + \frac{ی}{ن})$ کا حقیقی حصہ - ∞ کی طرف متسع ہوتا ہے جبکہ ی کا حقیقی حصہ منفی ہو، پس

اوپر کا نتیجہ برآمد ہوتا ہے - یہ اِن واقعات پر مبنی ہے کہ Σ $\frac{۱}{ن}$ متسع ہے

اور Σ $\frac{۱}{ن^۲}$ مستدق -

(343)

جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا

۲۸۲ — اب ہم وہ جملے معلوم کرینگے جو جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرتے ہیں جبکہ زاویہ کا دائری ناپ لا ہو- ہم اول لا کو حقیقی اور مثبت لینگے-

اب

$$\text{جب لا} = ۲ \text{جب} \frac{\text{لا}}{۲} \text{جب} \frac{\text{لا} + \pi}{۲}$$

$$= ۲^۳ \text{جب} \frac{\text{لا}}{۴} \text{جب} \frac{\text{لا} + \pi}{۴} \text{جب} \frac{\text{لا} + ۲\pi}{۴} \text{جب} \frac{\text{لا} + ۳\pi}{۴}$$

اور اس عمل کو جاری رکھنے سے

$$\text{جب لا} = ۲^{ن-۱}\ \text{جب}\frac{\text{لا}}{ن}\ \text{جب}\frac{\text{لا}+\pi}{ن}\ \text{جب}\frac{\text{لا}+۲\pi}{ن}\ \ldots\ \text{جب}\frac{\text{لا}+(ن-۱)\pi}{ن}$$

جہاں ن ، ۲ کی کوئی مثبت صحیح قوت ہے ۔ پس

$$\text{جب لا} = ۲^{ن-۱}\ \text{جب}\frac{\text{لا}}{ن}\ \text{جم}\frac{\text{لا}}{ن}\left(\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{ن} - \text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}\right)$$

$$\left(\text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{ن} - \text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}\right)\ldots\left(\text{جب}^{۲}\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن} - \text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}\right)$$

اور چونکہ $\text{نہا}_{\text{لا}=\cdot}\ \text{جب لا قم}\frac{\text{لا}}{ن} = ن$ ، اسلئے

$$ن = ۲^{ن-۱}\ \text{جب}^{۲}\frac{\pi}{ن}\ \text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{ن}\ \ldots\ \text{جب}^{۲}\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن}$$

پس عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب لا}}{ن\ \text{جب}\frac{\text{لا}}{ن}\ \text{جم}\frac{\text{لا}}{ن}} = \left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}}{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{ن}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}}{\text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{ن}}\right)\ldots\ldots$$

$$\left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}}{\text{جب}^{۲}\frac{(ن-۲)\pi}{۲ن}}\right)$$

یہ دفعہ ۲۸۷ کے مسئلہ (۱۹) کی وہ خاص صورت ہے جبکہ ن ، ۲ کی ایک قوت ہو ۔ بلاشبہ ہم اُس عام مسئلہ کو اختیار کر سکتے تھے ۔ فرض کرو $\frac{۱}{۲}(ن-۲) = ر$ ، تب اگر م کوئی عدد ہو ر سے چھوٹا تو

$$\text{جب لا} = ن\ \text{جب}\frac{\text{لا}}{ن}\ \text{جم}\frac{\text{لا}}{ن}\left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}}{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{ن}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}}{\text{جب}^{۲}\frac{۲\pi}{ن}}\right)\ldots\left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{لا}}{ن}}{\text{جب}^{۲}\frac{م\pi}{ن}}\right)\text{ب}$$ ،

کیونکہ عددوں کے کسی جبٹ کے مجموعہ کا مقیاس اِن کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑھ نہیں سکتا۔ اب اگر سلسلہ $\sum |\epsilon|$ مستدق ہو تو دفعہ ۲۸۰ میں جو کچھ ثابت ہوا ہے اس کی بموجب لاانتناہی حاصل ضرب $\prod (1+|\epsilon|)$ مستدق ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی مقررہ عدد δ کے جواب ہیں ن متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$(1+|\epsilon_n|)(1+|\epsilon_{n+1}|)\cdots(1+|\epsilon_{n+r}|)-1<\delta$$

اسلئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے

$$|(1+\epsilon_n)(1+\epsilon_{n+1})\cdots\cdots(1+\epsilon_{n+r})-1|<\delta$$

اور اسلئے حاصل ضرب $\prod(1+\epsilon)$ مستدق ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ $\prod(1+\epsilon)$ مستدق ہو لیکن سلسلہ $\sum|\epsilon|$ متسع، ایسی صورت میں حاصل ضرب $\prod(1+\epsilon)$ کو نا مطلقاً مستدق یا نیم مستدق کہتے ہیں۔

مسئلہ بالا سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لاانتناہی حاصل ضرب

$$(1+u_1 z)(1+u_2 z)\cdots(1+u_n z)\cdots\cdots$$

مستدق ہے اگر

$$|u_1|+|u_2|+\cdots\cdots+|u_n|+\cdots\cdots$$

ایک مستدق سلسلہ ہو۔

(342) فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا ایک تواتر $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ ہے جو سب کے سب ہم علامت ہیں اور فرض کرو کہ $\lim_{n=\infty} b_n = 0$،

لیکن فرض کرو کہ سلسلہ

$$b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n+\cdots\cdots$$

متسع ہے ۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب Π (۱ + خ بن) مستدق نہیں ہے ۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

۱ + خ بن = (۱ + ب۲ن)$^{\frac{1}{2}}$ و$^{\pm}$ خ فن جہاں مس فن = ا بن ا

اور ± خ فن میں اوپر کی مثبت علامت لینی چاہیئے اگر بن مثبت ہے اور منفی علامت لینی چاہیئے اگر بن منفی ہے ۔ اگر ضہ اختیاری طور پر نتیجۃً ایک مثبت عدد ایک سے کم ہو تو ن کی تمام کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے فن > (۱ - ضہ) مس فن، اور اس لئے

Σ فن مستدق نہیں ہو سکتا ۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ Π (۱ + خ بن) مستدق نہیں ہو سکتا اگرچہ Π (۱ + ب۲ن)$^{\frac{1}{2}}$ مستدق ہوگا اگر سلسلہ

Σ ب۲ن مستدق ہو ۔ اس مسئلہ کے جواز کے لئے یہ صریحاً کافی ہے کہ تمام عدد بن سوائے ایک محدود جملہ کے ہم علامت ہونے چاہئیں

اگر ی، ملتف عدد لا + خ ما ہو اور عدد ا۱، ا۲، ... ان .... سب کے سب مثبت ہوں اور ایسے ہوں کہ Σ ان متسع ہے تو حاصل ضرب

Π (۱ + ان ی) یقیناً متسع ہے اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو ۔ کیونکہ رقموں ۱ + ان ی کے مقیاسوں کا حاصل ضرب، حاصل ضرب Π (۱ + ان لا) سے بڑا ہے اور یہ ثانی الذکر حاصل ضرب متسع ہے جبکہ لا مثبت ہو ۔

حاصل ضرب (۱ + لا/۱ق) (۱ + لا/۲ق) ... (۱ + لا/ن ق) .... جبکہ

اگر یہ سلسلہ مستدق ہے تو لامتناہی حاصل ضرب صفر سے مختلف ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسکا عکس بھی درست ہے اگر یہ لامتناہی حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ یا لا - ∞ کی طرف متسع ہوتا ہے اور اس لئے ہم اس صورت کو حسب سابق خارج کرتے ہیں -

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ لامتناہی سلسلہ کا استدقاق لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے مماثل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ سلسلہ کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہر صہ کے جواب میں ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$|لوگ_و\,(ی_{ن+۱}\; ی_{ن+۲} \ldots ی_{ن+ر})| \;یا\; |لوگ_و\,(۱+غ_{ن،ر})| < صہ -$$

اگر یہ شرط پوری ہو تو دفعہ ۲۳۰ (ا) میں ثابت کردہ مسئلہ

$|و^{ی}-۱| < |ی|\,(۱+\frac{۱}{۲}|ی|\,و^{|ی|})$ کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے $|غ_{ن،ر}| < صہ\,(۱+\frac{۱}{۲}\,صہ\,و^{صہ})$ - اب اگر ضہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$صہ\,(۱+\frac{۱}{۲}\,صہ\,و^{صہ}) < ضہ$، اور اسلئے ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے $|غ_{ن،ر}|$ یا $|ی_{ن+۱}\, ی_{ن+۲} \ldots ی_{ن+ر} - ۱|$ $<$ ضہ، اس لئے لامتناہی حاصل ضرب مستدق ہے - اس کے بالعکس مان لو کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$|غ_{ن،ر}| < صہ$ - دفعہ ۲۴۹ (ا) میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر

$|\text{ی}| < ۱$ تو

$$\left|\text{لوک}_{\text{ق}}(۱+\text{ی})\right| < |\text{ی}|\left(۱ + \frac{۱}{۲}\,\frac{|\text{ی}|}{۱-|\text{ی}|}\right)$$

اس لئے $\left|\text{لوک}_{\text{ق}}(۱+\text{غ}_{\text{ن}،\text{ر}})\right| < \text{ص}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ص}}{۱-\text{ص}}\right)$

یا $\quad \text{لوک}_{\text{ق}}\left(\text{ی}_{\text{ن}+۱}\,\text{ی}_{\text{ن}+۲}\cdots\text{ی}_{\text{ن}+\text{ر}}\right) < \text{ضہ} \qquad (340)$

بشرطیکہ $\text{ص}\left(۱+\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ص}}{۱-\text{ص}}\right) < \text{ضہ}$، اور اگر ضہ مقررہ ہے تو ص متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو۔ پس سلسلہ کے استدقاق کی شرط پوری ہو چکی۔

۲۸۰ — فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تواتر $\text{ع}_۱، \text{ع}_۲، \text{ع}_۳، \ldots \text{ع}_{\text{ن}} \ldots$ ہے جنہیں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(۱+\text{ع}_۱)(۱+\text{ع}_۲)\cdots(۱+\text{ع}_{\text{ن}})\cdots \text{ یا } \prod_۱^\infty(۱+\text{ع})$$

اور $$(۱-\text{ع}_۱)(۱-\text{ع}_۲)\cdots(۱-\text{ع}_{\text{ن}})\cdots \text{ یا } \prod_۱^\infty(۱-\text{ع})$$

دونوں مستدق ہوتے ہیں اگر سلسلہ $\text{ع}_۱+\text{ع}_۲+\cdots+\text{ع}_{\text{ن}}+\cdots$ مستدق ہو اور مستدق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متسع ہو۔

چونکہ

$$(۱+\text{ع}_۱)(۱+\text{ع}_۲)\cdots(۱+\text{ع}_{\text{ن}}) > ۱+\text{ع}_۱+\text{ع}_۲+\cdots+\text{ع}_{\text{ن}}$$

اسلئے یہ واضح ہے کہ حاصل ضرب $\prod(۱+\text{ع})$ متسع ہوتا ہے اگر سلسلہ $\text{ع}_۱+\text{ع}_۲+\ldots$ متسع ہو۔

نیز

$$\frac{1}{(1-\text{ع}_1)(1-\text{ع}_2)\cdots(1-\text{ع}_\text{ن})} > (1+\text{ع}_1)(1+\text{ع}_2)\cdots(1+\text{ع}_\text{ن})$$

پس اگر Σ ع متسع ہو تو حاصل ضرب $(1-\text{ع}_1)(1-\text{ع}_2)\cdots(1-\text{ع}_\text{ن})$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔

پھر اگر Σ ع مستدق ہو تو فرض کرو کہ ص اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، .... کے لئے

$$\text{ع}_{\text{ن}+1}+\text{ع}_{\text{ن}+2}+\cdots+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}} < \text{ص}$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1-\text{ع}_{\text{ن}+1})(1-\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1-\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})$$

$$> 1-(\text{ع}_{\text{ن}+1}+\text{ع}_{\text{ن}+2}+\cdots+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}}) > 1-\text{ص}$$

اور اسلئے $\left|(1-\text{ع}_{\text{ن}+1})(1-\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1-\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})-1\right| < \text{ص}$

اور اس طرح وہ شرط جو لامتناہی حاصل ضرب $\Pi(1-\text{ع})$ کے استدقاق کے لئے دفعہ ۲۷۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+\text{ع}_{\text{ن}+1})(1+\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})$$

$$< \frac{1}{(1-\text{ع}_{\text{ن}+1})(1-\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1-\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})} < \frac{1}{1-\text{ص}}$$

اور اسلئے $\left|(1+\text{ع}_{\text{ن}+1})(1+\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})-1\right| < \frac{\text{صہ}}{1-\text{صہ}}$

(341)

پس اگر ضہ اختیاری طور پر منتخب ہو تو ہم صہ کو متعین کر سکتے ہیں ایسا کہ $\text{صہ}/(1-\text{صہ}) < \text{ضہ}$ اور اسلئے ن متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ $\text{ر} = 1، 2، 3، \ldots$ کے لئے

$$\left|(1+\text{ع}_{\text{ن}+1})(1+\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})-1\right| < \text{ضہ}$$

اس لئے حاصل ضرب $\Pi(1+\text{ع})$ مستدق ہے۔ یہ واضح ہے کہ اس شرط کی بجائے کہ $\text{ع}_1، \text{ع}_2، \ldots، \text{ع}_{\text{ن}}، \ldots$ سب کے سب ایک سے کم ہوں یہ وسیع شرط رکھی جا سکتی ہے کہ اِن عددوں کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد ایک سے کم ہوں۔ کیونکہ ہم $\Pi(1+\text{ع})$ یا $\Pi(1-\text{ع})$ سے اجزائے ضربی کی ایک محدود تعداد اسکے استدقاق کو متاثر کئے بغیر علیحدہ کر سکتے ہیں۔

۲۸۱ — اب لامتناہی حاصل ضرب

$$(1+\text{ع}_1)(1+\text{ع}_2)\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}})\cdots$$

پر غور کرو جہاں $\text{ع}_1، \text{ع}_2، \ldots$ مختلف عدد ہیں۔ ہم یہ دکھائینگے کہ $\text{ع}_1، \text{ع}_2، \ldots \text{ع}_{\text{ن}}، \ldots$ کے مقیاسوں کا سلسلہ

$$|\text{ع}_1|+|\text{ع}_2|+\cdots+|\text{ع}_{\text{ن}}|+\cdots$$

مستدق ہو تو اوپر کا لامتناہی حاصل ضرب بھی مستدق ہے۔ اِس صورت میں لامتناہی حاصل ضرب کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left|(1+\text{ع}_{\text{ن}})(1+\text{ع}_{\text{ن}+1})\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})-1\right|$$
$$\leqslant (1+|\text{ع}_{\text{ن}}|)(1+|\text{ع}_{\text{ن}+1}|)\cdots(1+|\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}}|)-1$$

مقیاس کو تعبیر کرتا ہے تو اِس لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ $|ض_ن|$ اور $ط_ن$ دونوں معیّن قیمتوں کی طرف مستدق ہوں جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے۔ اگر ن کے ساتھ $|ض_ن|$ بھی لاانتہا بڑھے تو اس لامتناہی حاصل ضرب کو متسع کہتے ہیں۔ دیگر صورتوں میں جبکہ یہ حاصل ضرب مستدق نہ ہو اسکو اہتزازی حاصل ضرب کہتے ہیں، لیکن اہتزازی حاصل ضربوں کو اکثر متسع کہا جاتا ہے۔

وہ ضروری اور کافی شرط کہ لامتناہی حاصل ضرب $ی_۱ ی_۲ \ldots ی_ن \ldots$ ایک معیّن انتہا (صفر سے مختلف) کی طرف مستدق ہو یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخبہ ہر مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک صحیح عدد ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے $|ی_{ن+۱}\, ی_{ن+۲}\, ی_{ن+۳} \ldots ی_{ن+ر} - ۱| <$ صہ۔ یہ ثابت کرنیکے لئے کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ $ض_ن$، ض کی طرف مستدق ہوتا ہے جو صفر سے مختلف ایک عدد ہے۔ تب عددوں $|ض_۱|$، $|ض_۲|$، ... $|ض_ن|$ ... کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد $|ض| -$ ضہ سے بڑے ہیں جہاں ضہ اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے ایسا کہ $|ض| -$ ضہ > ۰۔ نیز اِن عددوں میں سے کوئی عدد معدوم نہیں ہوتا، اس لئے ایک مثبت عدد ک موجود ہے جو سب عددوں $|ض_۱|$، $|ض_۲|$، ... $|ض_ن|$ ... سے چھوٹا ہے۔ اب چونکہ $ض_ن$ ایک معیّن انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے صہ کے جواب میں ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $|ض_{ن+ر} - ض_ن| <$ ک صہ ر

(339)

کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے۔

پس $|ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ی_{ن+۳} ... ی_{ن+ر} - ۱| < ک صہ \, |ی_۱ ی_۲ ... ی_ن| < صہ$

اور اسلئے مذکورہ شرط ضروری ہے۔

پھر یہ ثابت کرنیکے لئے کہ یہ شرط کافی ہے مان لو کہ وہ پوری ہوتی ہے۔ تب صہ کی کسی مقررہ قیمت کے جواب میں ن مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ $ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ... ی_{ن+ر} = ۱ + غ_{ن، ر}$ جہاں

$ر = ۱، ۲، ...$ کے لئے $|غ_{ن، ر}| < صہ$۔ تب $ض_{ن+ر} = ض_ن (۱ + غ_{ن، ر})$

اور اس لئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے $|ض_{ن+ر}| <$

$|ض_ن| (۱ + صہ)$۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اعداد $|ض_۱|$،

$|ض_۲|$، $|ض_۳|$، ...، $|ض_ن|$، ... سب کے سب ایک ثابت

مثبت عدد لہ سے کم ہیں۔ اب چونکہ $|ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ... ی_{ن+ر} - ۱|$

$< صہ$ اسلئے $|ض_{ن+ر} - ض_ن| < لہ صہ$ جہاں $ر = ۱، ۲، ۳، ...$

اور چونکہ صہ کو کافی چھوٹا لینے سے لہ صہ اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ $ض_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہونا چاہئے۔

لامتناہی حاصل ضرب $ی_۱ ی_۲ ی_۳ ... ی_ن ...$ کے استدقاق پر غور کرنیکا آسان طریقہ سلسلہ

$$لوگ_و ی_۱ + لوگ_و ی_۲ + ... + لوگ_و ی_ن + ...$$

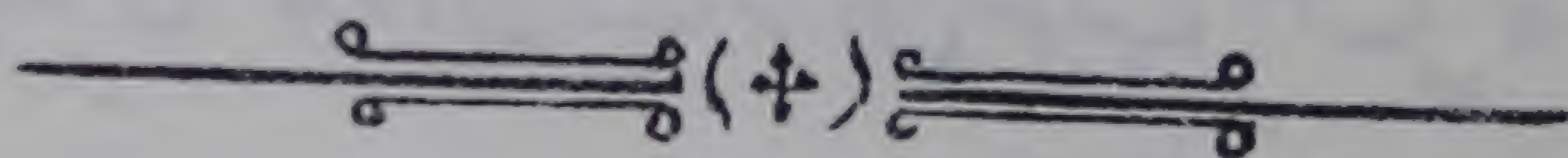
پر غور کرنیکا ہے۔

جہاں عہ دائری ناپ کی اکائی ہے۔

۱۳ — یولر کا مسئلہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{جم}\ \frac{۱}{۲}\ \text{لا جم}\ \frac{۱}{۴}\ \text{لا جم}\ \frac{۱}{۸}\ \text{لا} \ldots$

سے اخذ کرو

$$(۱)\quad \frac{۱}{\text{لوگ}_\text{و}\ \text{لا}} = \frac{۱}{\text{لا} - ۱} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱ + \text{لا}^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۱ + \text{لا}^{\frac{۱}{۴}}} + \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۱ + \text{لا}^{\frac{۱}{۸}}} + \ldots\ldots،$$

$$(۲)\quad \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} = \text{قم}^{۲}\ \text{لا} + \frac{۱}{۲^{۲}}\ \text{قطر}^{۲}\ \frac{۱}{۲}\ \text{لا} + \frac{۱}{۴^{۲}}\ \text{قطر}^{۲}\ \frac{۱}{۴}\ \text{لا} + \frac{۱}{۸^{۲}}\ \text{قطر}^{۲}\ \frac{۱}{۸}\ \text{لا} + \ldots\ldots$$

سترھواں باب

لا متناہی حاصل ضرب

لا متناہی حاصل ضربوں کا استدقاق

۲۷۹ — فرض کرو کہ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک تواتری $ی_۱$، $ی_۲$، .... $ی_ن$، .... ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے۔ ان عددوں میں سے پہلے ن عددوں کے حاصل ضرب $ض_ن \equiv ی_۱ ی_۲ \ldots ی_ن$ پر غور کرو۔

اگر $ض_ن$، صفر سے مختلف ایک معین انتہا ض کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ض، لا متناہی حاصل ضرب $ی_۱ ی_۲ \ldots ی_ن \ldots$ کی انتہا یا انتہائی قیمت ہے اور یہ لا متناہی حاصل ضرب مستدق ہے۔

مستدق لا متناہی حاصل ضربوں کی جماعت سے اُن حاصل ضربوں کو خارج کر دینا سہولت بخش ہے جنکے لئے $ض_ن$ صفر کی طرف مستدق ہو۔

اگر $ض_ن = |ض_ن| (جم\ طن + خ جب\ طن)$ جہاں $|ض_ن|$، $|ض_ن|$ کے

جہاں　　$ب = \left(1 - \frac{جب^2 \frac{لا}{ن}}{جب^2 \frac{(م+1)\pi}{ن}}\right) \cdots \left(1 - \frac{جب^2 \frac{لا}{ن}}{جب^2 \frac{ر\pi}{ن}}\right)$

(344)

اب ن کو ۲ لا \ π سے بڑا لیکر م کو منتخب کیا جا سکتا ہے ایسا کہ
$لا < (م+1)\pi$، تب ب مثبت ہے اور ایک سے کم۔ نیز دفعہ ۲۲۶ کے مطابق

$$ب > 1 - جب^2 \frac{لا}{ن} \left\{ قم^2 \frac{(م+1)\pi}{ن} + \cdots + قم^2 \frac{ر\pi}{ن} \right\}$$

اب ہم دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھا چکے ہیں کہ اگر $ط < \frac{1}{2}\pi$ تو

$$\frac{جب\, ط}{ط} > \frac{جب \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi}$$

پس اگر $ف < \frac{ن}{2}$ تو $قم^2 \frac{ف\pi}{ن} < \frac{ن^2}{4ف^2}$، نیز $جب^2 \frac{لا}{ن} < \frac{لا^2}{ن^2}$

اسلئے $ب > 1 - \frac{لا^2}{4} \left\{ \frac{1}{(م+1)^2} + \frac{1}{(م+2)^2} + \cdots + \frac{1}{ر^2} \right\}$،

$$> 1 - \frac{لا^2}{4} \left\{ \frac{1}{م(م+1)} + \frac{1}{(م+1)(م+2)} + \cdots + \frac{1}{(ر-1)ر} \right\}،$$

$$> 1 - \frac{لا^2}{4}\left(\frac{1}{م} - \frac{1}{ر}\right) > 1 - \frac{لا^2}{4م}$$

چونکہ ب، ایک اور $1 - \frac{لا^2}{4م}$ کے درمیان ہے اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$\text{ب} = 1 - \frac{\text{طہ}\,\text{لا}^2}{4\text{م}}$ جہاں طہ، صفر اور ایک کے درمیان ہے تب

$$\text{جب}\,\text{لا} = \text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{طہ}\,\text{لا}^2}{4\text{م}}\right)$$

جہاں م، $\frac{1}{2}$ن سے کم کوئی عدد ہے ایسا کہ $\text{لا} < (\text{م}+1)\pi$ ۔
اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے لیکن م ثابت رہتا ہے تو چونکہ حاصل ضرب میں کی ہر جیب کی بجائے متناظر دائری ناپ رکھا جا سکتا ہے اور چونکہ جم $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ کی انتہا ایک ہے اسلئے

$$\text{جب}\,\text{لا} = \text{لا}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{لا}^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{طہ}_1\,\text{لا}^2}{4\text{م}}\right)$$

جہاں طہ۱، طہ کی انتہائی قیمت ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا لیا جاتا ہے اور اسلئے طہ۱ ایسا ہے کہ $0 \leqslant \text{طہ}_1 \leqslant 1$ ۔

اب م کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم جزو ضربی $1 - \frac{\text{طہ}_1\,\text{لا}^2}{4\text{م}}$ کو ایک کے اتنا قریب لا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں، اسلئے جب لا کے لئے لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر جملہ حاصل ہوتا ہے[1]

$$\text{جب}\,\text{لا} = \text{لا}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{لا}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots \quad (1)$$

[1] اس دفعہ کی تحقیق "Schlömilch" سے منسوب ہے، دیکھو اسکی کتاب Compendium der höheren Analysis, vol. 1

یہ قید کہ لا مثبت ہونا چاہئے صریحاً اٹھالی جا سکتی ہے۔

۲۸۳ — اگر ن جفت ہو تو دفعہ ۸۶ کے ضابطہ (۱۷)

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{3\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{م}-1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{طہ}\,\text{لا}^2}{\text{م}^2}\right)$$

جہاں م کوئی محدود عدد ہے ایسا کہ $2\,\text{لا} < (2\text{م}+1)\pi$ اور طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ پس جم لا کے لئے لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots(2)$$

۲۸۴ — ضابطہ (۱) اور (۲) کی اہمیت کے مدنظر ہم ان کا دوسرا ثبوت دینگے جو سیرٹ کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔ ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right),$$

$$\text{جم لا} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

(346) کو جو ن کی جفت قیمتوں کے لئے درست ہیں لیکر ہم ان کو ضابطہ

$1 - \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{جب}^2\text{بہ}} = \text{جم}^2\text{عہ}\left(1 - \frac{\text{مس}^2\text{عہ}}{\text{مس}^2\text{بہ}}\right)$ کے ذریعہ حسب ذیل شکلوں میں

تحویل کر سکتے ہیں

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(۱-\frac{\text{مس}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^۲\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)،$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}\text{ن}}\left(۱-\frac{\text{مس}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^۲\frac{(۲\text{ر}-۱)\pi}{۲\text{ن}}}\right)$$

اب دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب، طہ، صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے، $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ گھٹتا ہے اور $\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$ بڑھتا ہے، اس لئے

$$\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{عہ}}{\text{جب}^۲\text{بہ}}\right) > \left(۱-\frac{\text{عہ}^۲}{\text{بہ}^۲}\right) > \left(۱-\frac{\text{مس}^۲\text{عہ}}{\text{مس}^۲\text{بہ}}\right)$$

جہاں ہر جملہ کی مطلق قیمت لینی چاہئے۔ فرض کرو کہ ن اسقدر بڑا ہے کہ $\pm\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{۱}{۲}\pi$

تب $\pm\text{جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \pm\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \pm\text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ اور $\pm\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < ۱$ جہاں علامتیں ایسی لینی چاہئیں کہ ہر جملہ اپنی حسابی قیمت رکھے۔ جب لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm\text{جب لا} < \pm\text{لا}\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(۱-\frac{\text{لا}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}\right)،$$

$$\text{اور}\ \pm\text{جب لا} > \pm\text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\times\text{لا}\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(۱-\frac{\text{لا}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}\right)$$

اور جم لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm\,\text{جم لا} > \pm \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{ر}-1)^2\pi^2}\right)$$

اور
$$\pm\,\text{جم لا} > \pm\,\text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{ر}-1)^2\pi^2}\right)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ $\text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} = 1 - \text{ص}_{\text{ن}}$ جہاں $\text{ص}_{\text{ن}}$ ایک عدد ہے جو صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)\left(1 - \text{ط}_{\text{ن}}\right)'$$

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{ن}-1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \text{طَ}_{\text{ن}}\right)$$

(347) جہاں $\text{ط}_{\text{ن}}$، $\text{طَ}_{\text{ن}}$ صفر کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، پس اِس طرح ضابطے (۱) اور (۲) حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ہم ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2\,\text{لا}}{\text{جب}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

کو جو ن کی طاق قیمت کے لئے درست ہیں استعمال کرتے اور ان سے ضابطے

$$\text{جب لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\left(1-\frac{\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)،$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\left(1-\frac{\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

حاصل کرتے تو استدلال بالا سے وہی نتیجے حاصل ہوتے ۔

۲۸۵ ـ اب ہم ملتف عدد ی = لا + خ ربا کی صورت پر غور کرینگے۔ دفعہ ۲۸۲ کے مطابق ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ی} = \text{ن جب}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\ \text{جم}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\text{ب}،$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ب} = \left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$$

جہاں ن ایک جفت عدد ہے اور $\text{ر} = \frac{1}{2}(\text{ن}-2)$۔ ہمیں ب کی قیمت کے لئے حدود متعین کرنا ہے۔ فرض کرو کہ $\text{جب}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ کا مقیاس غ سے تعبیر ہوتا ہے، تب دفعہ ۲۸۱ کے مطابق، چونکہ کسی عددوں کے مجموعہ کا مقیاس انکے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ (ب - ۱) کا مقیاس جملہ

$$\left(1+\frac{\text{غ}^2}{\text{جب}^2\frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1+\frac{\text{غ}^2}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)-1$$

(348) سے کم ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ $\text{و}^{\text{ا غہ}^2} > 1 + \text{ا غہ}^2$ اگر ا کوئی مثبت عدد ہو، اسلئے

$$(\text{ب}-1)\ \text{کا مقیاس} < \text{و}^{\text{غہ}^2\left(\text{قم}^2\frac{\text{ن}^2}{\pi^2(\text{م}+1)^2}+\cdots+\text{قم}^2\frac{\text{ن}^2}{\pi^2\text{ر}^2}\right)}-1$$

اور یہ

$$< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\text{غہ}^2\text{ن}^2\left\{\frac{1}{(\text{م}+1)^2}+\frac{1}{(\text{م}+2)^2}+\cdots+\frac{1}{\text{ر}^2}\right\}}-1،$$

یا

$$< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\text{غہ}^2\text{ن}^2\left\{\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{م}+1}+\frac{1}{\text{م}+1}-\frac{1}{\text{م}+2}+\cdots-\frac{1}{\text{ر}}\right\}}-1،$$

$$\text{اسلئے}\ (\text{ب}-1)\ \text{کا مقیاس} < \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\text{غہ}^2\text{ن}^2\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ر}}\right)}-1$$

یا

$$< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\frac{\text{غہ}^2\text{ن}^2}{\text{م}}}-1$$

پس $(\text{ب}-1)$ کا مقیاس صفر اور $\text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\frac{\text{غہ}^2\text{ن}^2}{\text{م}}}-1$ کے درمیان واقع ہے۔

اب

$$\text{غہ}^2 = \text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جمز}^2\frac{\text{ما}}{\text{ن}} + \text{جم}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جبز}^2\frac{\text{ما}}{\text{ن}} = \text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}} + \text{جبز}^2\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$$

اسلئے $\text{غہ}^2\text{ن}^2$ کی انتہائی قیمت $\text{لا}^2+\text{ما}^2$ ہے اور اسلئے $(\text{ب}-1)$ کے مقیاس کی انتہا جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے صفر اور $\text{و}^{\frac{\text{لا}^2+\text{ما}^2}{\pi^2\text{م}}}-1$ کے درمیان واقع ہوتی ہے، اور چونکہ $\text{و}^{\frac{\text{لا}^2+\text{ما}^2}{\pi^2\text{م}}}$ کو م کے کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے $(\text{ب}-1)$ کے مقیاس کو جتنا چاہیں اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ جب، ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو جب ی کے جملہ کی

ہر جیب آخر لامر اپنی دلیل کے مساوی ہو جاتی ہے، اسلئے

$$\text{جب ی} = \text{ی}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

اسی طرح ضابطہ

$$\text{جم ی} = \left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۲۸۶ — ضابطے (۱) اور (۲) مطلق استدقاق کی اُس شرط کو جو دفعہ ۲۸۱ میں بیان ہوئی ہے پورا کرتے ہیں کیونکہ یہ دو سلسلے $\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\text{ن}^2}$ اور $\frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2\text{ر}-1)^2}$ مستدق ہیں۔ اِن ضابطوں میں سے کسی حاصل ضرب کا ہر دو درجی جزو ضربی دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، چنانچہ

(349)

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\cdots\cdots,$$

$$\text{جم لا} = \left(1 + \frac{2\,\text{لا}}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2\,\text{لا}}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2\,\text{لا}}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2\,\text{لا}}{3\pi}\right)\cdots\cdots$$

جنکو شکلوں

$$\text{جب لا} = \text{لا}\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right), \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\text{جم لا} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + \frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right), \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اِن آخری شکلوں میں حاصل ضرب نیم مستدق ہیں کیونکہ حسب ذیل حاصل ضرب

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)،\quad \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)،\quad \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{۲\,\text{لا}}{(۲\text{ر}-۱)\pi}\right)،\quad \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{۲\,\text{لا}}{(۲\text{ر}-۱)\pi}\right)$$

متسع ہیں اسوجہ سے کہ سلسلے $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\text{ر}}$ ، $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{۲\text{ر}-۱}$ متسع ہیں ۔

کسی نیم مستدق حاصل ضرب میں نیم مستدق سلسلہ کی خاصیت کے مماثل یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کو بدلدینے سے حاصل ضرب کی قیمت پر اثر پڑتا ہے ' ہم ضابطوں (۳) اور (۴) کو صحیح خیال کرسکتے ہیں صرف اسوقت جبکہ یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ ر کی مثبت قیمتوں کی تعداد اسکی منفی قیمتوں کی تعداد کے مساوی لیگئی ہے ' اِس طرح (۳) اور (۴) کو ان شکلوں

$$\text{جب لا} = \text{لانہا}_{\text{ن}=\infty}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)،\quad \text{جم لا} = \text{نہا}_{\text{ن}=\infty}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{۲\,\text{لا}}{(۲\text{ر}-۱)\pi}\right)$$

کا اختصار سمجھنا چاہئے ۔

۲۸۷ ـ ویرسٹراس (Weierstrass)[1] نے یہ ثابت کیا ہے کہ متسع حاصل ضرب

$$\text{ی}\left(1+\frac{\text{ی}}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{۲\pi}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{۳\pi}\right)\cdots\cdots$$

مستدق بنایا جاسکتا ہے اگر اسکے ہر جزو ضربی کو ایک قوت نماجزو ضربی سے ضرب دیا جائے ۔ چنانچہ حاصل ضرب

$$\text{ی}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{\pi}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{ی}}{\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{۲\pi}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{ی}}{۲\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{۳\pi}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{ی}}{۳\pi}}\right\}\cdots\cdots$$

[1] دیکھو برلن اکاڈیمی کی "Abhandlungen" بابتہ سنہ ۱۸۷۶ء ۔

مطلقاً مستدق ہے۔

(350) چونکہ حسب دفعہ ۲۳۰ (۱)

$$\overline{\text{تو}}^{\,\frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}} = 1 - \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi} + \frac{\text{ی}^2}{2\,\text{ن}^2\pi^2}\left(1 + \text{ع}_{\text{ن}}\right)$$

جہاں $|\text{ع}_{\text{ن}}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، اسلئے اگر صہ اختیاری طور پر نتیجہ کوئی مثبت عدد ہو تو $|\text{ع}_{\text{ن}}| < \text{صہ}$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے جو صہ پر منحصر کسی خاص قیمت سے بڑی ہوں۔ اب

$$\left(1 + \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}\right)\overline{\text{تو}}^{\,\frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}} = \left(1 + \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}\right)\left\{1 - \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi} + \frac{\text{ی}^2}{2\,\text{ن}^2\pi^2}\left(1 + \text{ع}_{\text{ن}}\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{\text{ی}^2}{2\,\text{ن}^2\pi^2}\left(1 - \text{ع}_{\text{ن}}\right) + \frac{\text{ی}^3}{2\,\text{ن}^3\pi^3}\left(1 + \text{ع}_{\text{ن}}\right)$$

وہ سلسلہ جسکی عام رقم

$$\frac{\text{ی}^2}{2\,\text{ن}^2\pi^2}\left\{1 - \text{ع}_{\text{ن}} - \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}\left(1 + \text{ع}_{\text{ن}}\right)\right\}$$

ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ ن کی کافی طور پر بڑی سب قیمتوں کیلئے سلسلے $\sum \frac{1}{\text{ن}^2}$، $\sum \frac{1}{\text{ن}^3}$ مستدق ہیں، اور $|\text{ع}_{\text{ن}}| < \text{صہ}$، $|1 \pm \text{ع}_{\text{ن}}| < 1 + \text{صہ}$۔ اسلئے بموجب اُس مسئلے کے جو دفعہ ۲۸۱ میں ثابت ہو چکا ہے وہ لا متناہی حاصل ضرب جسکی عام رقم

$$۱ - \frac{ی^۲}{۲ ن^۲ \pi^۲} (۱ - ۶ ن) + \frac{ی^۳}{۲ ن^۳ \pi^۳} (۱ + ۶ ن)$$

یا $\left(۱ + \frac{ی}{ن \pi}\right) و^{- \frac{ی}{ن \pi}}$

ہے مطلقاً مستدق ہے۔

اگر ف (ی) سے مطلقاً مستدق حاصل ضرب $\prod_{۱}^{\infty} \left(۱ + \frac{ی}{ن \pi}\right) و^{- \frac{ی}{ن \pi}}$

کی انتہا اور ف (- ی) سے $\prod_{۱}^{\infty} \left(۱ - \frac{ی}{ن \pi}\right) و^{\frac{ی}{ن \pi}}$ کی انتہا تعبیر ہو تو

$$ف (ی) ف (- ی) = \frac{جب ی}{ی}$$

اوپر کا یہ نتیجہ جملہ

$$فہ (ی) = \left(۱ - \frac{ی}{\pi}\right)\left(۱ - \frac{ی}{۲ \pi}\right) \ldots \left(۱ - \frac{ی}{ن \pi}\right)\left(۱ + \frac{ی}{\pi}\right)\left(۱ + \frac{ی}{۲ \pi}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(۱ + \frac{ی}{م \pi}\right)$$

کی قیمت محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جبکہ م اور ن کو لاانتہا بڑا بنایا گیا ہو لیکن اس طور پہ کہ انکی نسبت ایک معین محدود انتہا رکھے۔

اگر $س_ن$ ، سلسلہ $۱^{-۱} + ۲^{-۱} + ۳^{-۱} + \ldots + ن^{-۱}$ کو تعبیر کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$جب ی = ی نہا فہ (ی) و^{\frac{ی}{\pi}(س_ن - س_م)}$$

اب یہ بہت مشہور ہے کہ $س_ن - لوگ_و ن$ کی انتہا جبکہ ن لامتناہی ہو

محدود عدد ۵۷۷۲۱۵۶....۰ ہے جسکو یولر کا مستقل کہتے ہیں، اس لئے س ان ـ س ام کی انتہائی قیمت جبکہ م اور ن لامتناہی ہوں لوک و $\frac{ن}{م}$ کی انتہائی قیمت ہے۔ پس

$$نہا فہ (ی) = ک^{\frac{ی}{\pi}} \times \frac{جب ی}{ی}$$

جہاں ک = نہا $\frac{م}{ن}$ اور نہا فہ (ی) کی قیمت = $\frac{جب ی}{ی}$ صرف اسوقت جبکہ م اور ن مساوی ہوتے ہوئے لامتناہی ہو جائیں۔

۲۸۸ — جم لا کے ضابطہ (۲) یا (۴) کو (۱) یا (۳) سے ضابطہ جم لا = جب ۲ لا \ ۲ جب لا کے ذریعہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{جب ۲ لا}{۲ جب لا} = ۲ لا \prod_{-\infty}^{\infty} \left(۱ + \frac{۲ لا}{ر\pi}\right) \Big\backslash ۲ لا \prod_{-\infty}^{\infty} \left(۱ + \frac{لا}{ر\pi}\right)$$

شمار کنندہ کے وہ اجزائے ضربی جنکے لئے ر جفت ہے نسب نما کے اجزائے ضربی کے ساتھ کٹ جاتے ہیں، اس لئے اگر ہم شمار کنندہ کے حاصل ضرب کو $\prod_{-۲ن}^{۲ن} \left(۱ + \frac{۲ لا}{ر\pi}\right)$ کی انتہا اور نسب نما کے حاصل ضرب کو $\prod_{-ن}^{ن} \left(۱ + \frac{لا}{ر\pi}\right)$ کی انتہا خیال کریں جبکہ ن لامتناہی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$جم لا = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(۱ + \frac{۲ لا}{(۲ س + ۱)\pi}\right)$$

جو (۲) یا (۴) کے مماثل ہے۔ حاصل ضربوں کے استدقاق کی شرط سے یہ واضح ہے کہ ایک حاصل ضرب میں ن کی بجائے ۲ ن لینے سے اس حاصل ضرب کی انتہائی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔

۲۸۹ — ضابطوں $\text{جب لا} = \text{جم}\left(\frac{1}{2}\pi - \text{لا}\right)$، $\text{جم لا} = \text{جب}\left(\frac{1}{2}\pi - \text{لا}\right)$ کی مدد سے جب لا کے لئے حاصل ضربی ضابطہ جم لا کے ضابطہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا اسکے بالعکس۔ ضابطہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\pi - 2\,\text{لا}}{\pi(2\text{ر} - 1)}\right) = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\text{ر}\pi - 2\,\text{لا}}{\pi(2\text{ر} - 1)}\right)$$

$$= \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{2\text{ر}}{2\text{ر} - 1} \times \text{لا} \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$$

جہاں جزو ضربی لا، ر = ۰ کے جواب میں ہے۔ لا = ۰ کیلئے $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لازماً $\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{2\text{ر}}{2\text{ر}-1} = 1$، پس

$$\text{جب لا} = \text{لا}\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$$

(352) **۲۹۰ —** جب لا اور جم لا کے حاصل ضربی ضابطوں کو ہم ایسی شکل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس سے اِن کے دوَری (Periodic) ہونیکی خاصیت ظاہر ہو جو تفاعلوں جب لا اور جم لا میں پائی جاتی ہے،

فرض کرو $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$

تو

$$\text{ف}(\text{لا} + \pi) = (\text{لا} + \pi)\left(1 + \frac{\text{لا} + \pi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\text{لا} + \pi}{2\pi}\right)\cdots\cdots$$

$$\left(1 + \frac{\text{لا} + \pi}{\text{ن}\pi}\right)\left(1 - \frac{\text{لا} + \pi}{\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{لا} + \pi}{\text{ن}\pi}\right)$$

$$= -\text{لا}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\cdots\left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi(\text{ن}+1)}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}}{\pi}\right)\cdots\cdots$$

...... (۱ − لا ⁄ (ن − ۱) π) (ن + ۱) ⁄ ن

= − [لا + (ن + ۱) π] ⁄ [ن π − لا] ف (لا)،

اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو نہاف (لا + π) = − نہاف (لا) جو مساوات جب (لا + π) = − جب لا ہے۔ اسی طرح ضابطہ (۴) کو ایسی شکل میں رکھا جا سکتا ہے کہ اس سے خاصیت

جم (لا + π) = − جم لا

کا اظہار ہو۔

تفاعل جب لا معدوم ہوتا ہے جبکہ لا = ۰، ± π، ± ۲ π، .....
اور یہ قیمتیں ضابطہ (۳) کے اجزائے ضربی لا، ۱ ± لا ⁄ π، ۱ ± لا ⁄ ۲π، ..... کے جواب میں ہیں، نیز دفعہ ۲۳۵ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ لا کی کسی خیالی قیمت کے لئے جب لا معدوم نہیں ہوتا، اسی طرح اگر یہ مان لیا جائے کہ جب لا کو لامتناہی حاصل ضرب

ا (لا − ا) (لا − ب) (لا − ج) .... ⁄ ا ب ج ....

کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے تو ا، ب، ج، ..... کی قیمتیں لازماً صفر، π، − π، ۲ π، − ۲ π، ..... ہونی چاہئیں۔ پھر ا کی قیمت، لا = ۰ رکھکر حاصل کیجاتی ہے اور مسئلہ نہا جب لا ⁄ لا = ۱ کو استعمال کر کے ضابطہ (۱) یا (۳) حاصل کیا جاتا ہے۔ لیکن اس ضابطہ کے اس ثبوت کی در اصل کوئی قدر و قیمت نہیں کیونکہ بغیر ثبوت کے ہمیں یہ ماننے کا کوئی حق نہیں ہے کہ جب لا مطلوبہ شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۹۱ — ضابطے (۱) اور (۲) خیالی دلیل خرما کی صورت میں

جو شکلیں اختیار کرتے ہیں ان پر غور کرنا ضروری ہے۔ اس صورت میں جبز ما کے لئے لامتناہی حاصل ضرب ملتے ہیں

$$\text{جبز ما} = \text{ما}\left(1 + \frac{\text{ما}^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\text{ما}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\text{ما}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \quad (5)$$

$$\text{جمز ما} = \left(1 + \frac{4\,\text{ما}^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4\,\text{ما}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4\,\text{ما}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (6)$$

(353)

یولر نے ضابطوں (۱)، (۲)، (۵)، (۶) کو اس متماثلہ

$$\text{ی}^{2\text{م}} - 1 = \text{م}(\text{ی}^2 - 1)\prod_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\text{م}-1}\left\{\frac{1 - 2\,\text{ی جم}\,\frac{\text{ن}\pi}{\text{م}} + \text{ی}^2}{2 - 2\,\text{جم}\,\frac{\text{ن}\pi}{\text{م}}}\right\}$$

کی مدد سے سب سے اول حاصل کیا تھا۔ رکھو $\text{ی} = 1 + \frac{\text{لا}}{\text{م}}$ تو یہ متماثلہ ہو جاتی ہے

$$\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} - \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{-\text{م}} = \frac{2\,\text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\text{م}}}{1 + \frac{\text{لا}}{\text{م}}}\prod_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\text{م}-1}\left\{1 + \frac{\text{لا}^2}{\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)\left(2\,\text{م جب}\,\frac{\text{ن}\pi}{2\,\text{م}}\right)^2}\right\}$$

اب اگر م کو لاانتہا بڑا کر دیا جائے تو یہ متماثلہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{-\text{لا}}\right) = \text{لا}\prod_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\infty}\left(1 + \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)$$

جو ضابطہ (۵) ہے۔

انتہا کی اس تخمین کے لئے دفعہ ۲۸۵ کی طرح ٹھیک تحقیقات کی ضرورت ہے۔

ضابطہ (۱)، لا کو خ لا میں تبدیل کر کے اخذ کیا گیا تھا، اور اسی طرح ضابطے (۲) اور (۶)، $\text{ی}^{2\text{م}} + 1$ کے ان جملوں سے حاصل کئے گئے تھے جو اجزائے ضربی

میں ہیں۔

مثالیں

۲۹۲ — (۱) π کے لئے ویالیس (Wallis) کے جملہ کی تحقیق کرو۔

جب لا کے اجزائے ضربی والے جملہ میں لا = $\frac{1}{2}\pi$ رکھو تو یہ تقریبی ضابطہ

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2\text{ن})^2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ ن بڑا ہو۔ اس کو لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi(2\text{ن}+1)} = \frac{2\times4\times6\cdots2\text{ن}}{1\times3\times5\cdots(2\text{ن}-1)}$$

اور یہ ویالیس کا ضابطہ ہے۔

(۲) جمز ما − جم عہ، جم لا − جم عہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جمز ما − جم عہ = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عہ + خر ما) جب $\frac{1}{2}$ (عہ − خر ما)

$$= \frac{1}{2}(\text{عہ}^2+\text{ما}^2)\prod_{1}^{\infty}\left\{1-\frac{(\text{عہ}+\text{خرما})^2}{4\text{ن}^2\pi^2}\right\}\times\left\{1-\frac{(\text{عہ}-\text{خرما})^2}{4\text{ن}^2\pi^2}\right\}$$

اور ما = ۰ رکھنے سے

$$1-\text{جم عہ} = \frac{1}{2}\text{عہ}^2\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\text{عہ}^2}{4\text{ن}^2\pi^2}\right)^2$$

پس

$$\frac{\text{جمزما}-\text{جم عہ}}{1-\text{جم عہ}} = \left(1+\frac{\text{ما}^2}{\text{عہ}^2}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\text{خرما}}{2\text{ن}\pi+\text{عہ}}\right)\left(1-\frac{\text{خرما}}{2\text{ن}\pi-\text{عہ}}\right)\times\left(1+\frac{\text{خرما}}{2\text{ن}\pi-\text{عہ}}\right)\left(1-\frac{\text{خرما}}{2\text{ن}\pi+\text{عہ}}\right)$$

اس لئے

$$\text{جمز ما} - \text{جم عہ} = ۲\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}\left(۱+\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{عہ}^{۲}}\right)\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱+\frac{\text{ما}^{۲}}{(۲\,\text{ن}\,\pi+\text{عہ})^{۲}}\right\}$$
$$\times\left\{۱+\frac{\text{ما}^{۲}}{(۲\,\text{ن}\,\pi-\text{عہ})^{۲}}\right\}$$

(354)

اس میں ما کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\text{جم لا} - \text{جم عہ} = ۲\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}\left(۱-\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{عہ}^{۲}}\right)\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱-\frac{\text{لا}^{۲}}{(۲\,\text{ن}\,\pi+\text{عہ})^{۲}}\right\}$$
$$\times\left\{۱-\frac{\text{لا}^{۲}}{(۲\,\text{ن}\,\pi-\text{عہ})^{۲}}\right\}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{\pi^{۲}}+\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۴\pi^{۲}}+\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۹\pi^{۲}}+\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۱۶\pi^{۲}}+\cdots$$

$$=\tfrac{۱}{۴}\,\pi-\text{مس}^{-۱}\left(\text{مستر}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\text{مم}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$$

چونکہ $\text{جب}(\text{لا}+\text{خ ما})=(\text{لا}+\text{خ ما})\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱-\frac{(\text{لا}+\text{خ ما})^{۲}}{\text{ن}^{۲}\pi^{۲}}\right\}$

اس لئے لوکارتم لینے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لوک}\,(\text{جب لا جمز ما}+\text{خ جم لا جبز ما})=\text{لوک}\,(\text{لا}+\text{خ ما})$$
$$+\sum_{۱}^{\infty}\text{لوک}\left\{۱-\frac{\text{لا}^{۲}-\text{ما}^{۲}}{\text{ن}^{۲}\pi^{۲}}-\text{خ}\,\frac{۲\,\text{لا ما}}{\text{ن}^{۲}\pi^{۲}}\right\}$$

اس مساوات کی طرفین کے خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{مس}^{-۱}(\text{مستر ما مم لا})=\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}-\sum_{۱}^{\infty}\text{مس}^{-۱}\frac{۲\,\text{لا ما}}{\text{ن}^{۲}\pi^{۲}-\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}}$$

فرض کرو $\text{لا}=۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

تو $\sum_{1}^{\infty}$ مس$^{-1}$ $\frac{1}{2ن^2}$ = $\frac{1}{4}$ ۲۲ − مس$^{-1}$ (مسز $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. بم $\frac{1}{2\sqrt{2}}$)

قوت نما تفاعل کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا

۲۹۴ (ا) – اُس صورت میں جسمیں |ی| < ا قوت نما تفاعل ق^{ی} کو میاتھوز (Mathews) [ط] نے مطلوبہ شکل میں بیان کیا ہے ۔

فرض کرو کہ ی، ایک مستدق سلسلہ $\sum_{ن=1}$ کـن لوگ$_و$ (۱ + ی^{ن}) کا انتہائی مجموعہ ہے ۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے کـ$_1$ = ۱، اور ن > ۱ کیلئے

$$\text{کـ}_{ن} + \sum \frac{(-1)^{ضہ-1}}{ضہ} \text{کـ}_{ضہ} = ۰$$

جہاں ضہ، ن کا کوئی مناسب صحیح عددی جزو ضربی ہے اور ضہَ = $\frac{ن}{ضہ}$، ضہ کی ہر ایسی قیمت کے جواب میں ایک رقم ملتی ہے ۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{ن کـ}_{ن} = \sum (-1)^{ضہَ} \text{ضہ کـ}_{ضہ} = \sum (-1)^{ن/ضہ} \text{ضہ کـ}_{ضہ}$$

اور تمام عددوں کـ ن کی قیمتوں کو مساواتوں کے اس جٹ سے معلوم کرنا ہوگا جنکا نمونہ یہ مساوات ہے ۔ اب استقراء سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

(۱) اگر ن = ۲^{م} تو کـ$_{ن}$ = $\frac{1}{2}$

(۲) اگر ن، مہ مختلف طاق مفرد عددوں کا حاصل ضرب ف$_1$ ف$_2$ ..... ف$_{مہ}$ ہو

تو کـ$_{ن}$ = (−۱)^{مہ} ن

ط Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. xiv, Page 228.

(355)

(۳) اگر $\text{ن} = \text{۲}^{\text{م}}\,\text{ف}_{\text{۱}}\,\text{ف}_{\text{۲}} \ldots \text{ف}_{\text{ر}}$ تو $\text{ک}_{\text{ن}} = (-\text{۱})^{\text{ر}}\ \text{۲}^{\text{م}-\text{۱}} \div \text{ن}$

(۴) اگر ن کا ایک جزو ضربی طاق عدد کا مربع ہو تو $\text{ک}_{\text{ن}} = \text{۰}$

اب یہ واقعہ کہ $\text{ک}_{\text{ن}}$ کی اُن قیمتوں کے ساتھ جو حسب تشریح بالا حاصل ہوتی ہیں سلسلہ

$$\sum \text{ک}_{\text{ن}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\,(\text{۱}+\text{ی}^{\text{ن}})$$

$|\text{ی}| < \text{۱}$ کے لئے مستدق ہوتا ہے آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے۔ پس ی کی سب قیمتوں کے لئے ایسی کہ $|\text{ی}| < \text{۱}$ قوت نما تفاعل $\text{و}^{\text{ی}}$ اس لامتناہی حاصل ضرب

$$\prod_{\text{۱}}^{\infty} (\text{۱}+\text{ی}^{\text{ن}})^{\text{ک}_{\text{ن}}} = (\text{۱}+\text{ی})(\text{۱}+\text{ی}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۱}+\text{ی}^{\text{۳}})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}(\text{۱}+\text{ی}^{\text{۴}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۴}}}\ldots$$

سے تعبیر ہوتا ہے، یا چونکہ $\text{۱} = (\text{۱}-\text{ی})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۱}+\text{ی})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}(\text{۱}+\text{ی}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\ldots$ اسلئے عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{ی}} = \left(\frac{\text{۱}+\text{ی}}{\text{۱}-\text{ی}}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \prod \left(\frac{\text{۱}+\text{ی}^{\text{ف}}}{\text{۱}-\text{ی}^{\text{ف}}}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲ف}}},\quad |\text{ی}| < \text{۱}$$

جہاں ف، مہ غیر مساوی طاق مفردوں کا حاصل ضرب ہے اور ف کی سب قیمتیں جو اِس شکل کی ہیں لگئی ہیں۔

مماس، مماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کے لئے سلسلے

۲۹۳- چونکہ $\text{جب ی} = \text{ی} \prod_{\text{۱}}^{\infty} \left(\text{۱} - \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{ن}^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}\right)$

اِس لئے اگر ی، π کا ضعف نہیں ہے تو

$$\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{جب ی} = \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ی} + \sum_{1}^{\infty} \text{لوک}_{\text{و}} \left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{ن}^2 \pi^2}\right)$$

فرض کرو کہ ھ ایک مثبت حقیقی عدد ہے۔ تب ی کو ی + ھ میں تبدیل کرنے سے اور پھر ان دو جملوں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{جب (ی + ھ)}}{\text{جب ی}} = \text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right) + \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}+\infty} \left\{ \text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi}\right) \right.$$

$$\left. + \text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi}\right) \right\}$$

اب دفعہ ۲۴۹ (ا) کا مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی}} - \frac{1}{2} \frac{\text{ھ}^2}{\text{ی}^2} (1 + \text{و}_{.}) ،$$

$$\text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi} - \frac{1}{2} \frac{\text{ھ}^2}{(\text{ی} - \text{ن}\pi)^2} (1 + \text{و}_{\text{ن}}) ،$$

$$\text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi} - \frac{1}{2} \frac{\text{ھ}^2}{(\text{ی} + \text{ن}\pi)^2} (1 + \text{ط}_{\text{ن}}) ،$$

(356) جہاں $\text{و}_{.}$، $\text{و}_{\text{ن}}$، $\text{ط}_{\text{ن}}$ سب کے سب صفر کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ ھ کو لاانتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ مزید براں اگر ی کی کوئی ثابت قیمت ہو جو صفر نہیں ہے یا π کا مثبت یا منفی صحیح عددی ضعف تو ھ کی کافی طور پر چھوٹی سب قیمتوں کے لئے عدد $|\text{و}_{.}|$، $|\text{و}_{1}|$، $|\text{و}_{2}|$ ..... اور $|\text{ط}_{1}|$، $|\text{ط}_{2}|$، $|\text{ط}_{3}|$ ..... سب کے سب کسی اختیاری طور پر منتخبہ مثبت عدد ص سے کم ہیں کیونکہ $|\text{ی}|$، $|\text{ی} - \text{ن}\pi|$، $|\text{ی} + \text{ن}\pi|$ کے مقیاس کسی ثابت عدد سے جو ن پر منحصر نہیں ہے بڑے ہیں۔

پس اب

$$\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}}$$

$$=\left[\frac{1}{\text{ی}}-\frac{1}{2}\frac{\text{ھ}}{\text{ی}^{2}}(1+\text{د})\right]+\sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\left[\frac{2\text{ی}}{\text{ی}^{2}-\text{ن}^{2}\pi^{2}}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{و}_{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^{2}}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{ط}_{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^{2}}\right]$$

جہاں بائیں جانب کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ ی، π کا ضعف نہ ہو
فرض کرو کہ ی ہے ایسا کہ $(\text{ر}-1)\pi < |\text{ی}| < \text{ر}\pi$ جہاں
ر کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تب اگر $\text{ی}^{2}/\text{ر}^{2}\pi^{2} = \text{ضہ} < 1$ تو ن کی
سب قیمتوں کے لئے جو ر سے بڑی یا اسکے مساوی ہوں

$|\text{ی}|^{2}/\text{ن}^{2}\pi^{2} \leqslant \text{ضہ}$ ۔ اب

$$\left|\frac{1}{\text{ن}^{2}\pi^{2}-\text{ی}^{2}}\right|=\frac{1}{\text{ن}^{2}\pi^{2}}\cdot\frac{1}{|1-\text{ی}^{2}/\text{ن}^{2}\pi^{2}|}\leqslant\frac{1}{\text{ن}^{2}\pi^{2}}\cdot\frac{1}{1-\text{ضہ}}$$

بشرطیکہ $\text{ن} \geqslant \text{ر}$، پس چونکہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم ن^{-2} ہے مستدق
ہے اسلئے وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{\text{ن}^{2}\pi^{2}-\text{ی}^{2}}$ ہے مطلقاً مستدق ہے۔

اب چونکہ وہ دو سلسلے جنکی عام رقمیں ہیں

$$\frac{2\text{ی}}{\text{ی}^{2}-\text{ن}^{2}\pi^{2}}\ ،\ \frac{2\text{ی}}{\text{ی}^{2}-\text{ن}^{2}\pi^{2}}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{و}_{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^{2}}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{ط}_{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^{2}}$$

دونوں مستدق ہیں اسلئے وہ سلسلہ بھی جسکی عام رقم ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ھ}\,\frac{1+\text{و}_{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^2}+\frac{1}{2}\,\text{ھ}\,\frac{1+\text{ط}_{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^2}$$

ہے مستدق ہے۔ اگر ھ کافی طور پر چھوٹا ہو تو اس عام رقم کا مقیاس

$$<\frac{1}{2}\,\text{ھ}\,(1+\text{ص})\left\{\frac{1}{|\text{ی}-\text{ن}\pi|^2}+\frac{1}{|\text{ی}+\text{ن}\pi|^2}\right\}$$

اب $|\text{ی}-\text{ن}\pi| \geq \text{ن}\pi-|\text{ی}| \geq \text{ن}\pi-(\text{ر}+1)\pi$ ، اسلئے

$$\frac{1}{|\text{ی}-\text{ن}\pi|^2}<\frac{1}{(\text{ن}-\text{ر}-1)^2\pi^2}$$

(357) جہاں $\text{ن} > \text{ر}+1$ ، پس یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{|\text{ی}-\text{ن}\pi|^2}$ ہے مستدق ہے۔ اسی طرح وہ سلسلہ جس کی عام $\frac{1}{|\text{ی}+\text{ن}\pi|^2}$ ہے مستدق ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اُس سلسلہ کے مجموعہ کا مقیاس جسکی عام رقم $\frac{1}{2}\,\text{ھ}\,\frac{1+\text{و}_{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^2}+\frac{1}{2}\,\text{ھ}\,\frac{1+\text{ط}_{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^2}$ ہے عدد $\frac{1}{2}\,\text{ھ}\,(1+\text{ص})\,\text{ا}(\text{ی})$ سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں $\text{ا}(\text{ی})$ ایک مثبت عدد ہے جو صرف ی پر منحصر ہے، یہ مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے جبکہ ھ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\underset{\text{ھ}=0}{\text{نہا}}\ \frac{1}{\text{ھ}}\,\text{لوگ}_{\text{ہ}}\,\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب}\,\text{ی}} = \frac{1}{\text{ی}}+\sum_{\text{ن}=1}\frac{2\,\text{ی}}{\text{ی}^2-\text{ن}^2\pi^2}$$

چونکہ $\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \text{جم ھ} + \text{جب ھ مم ی} = ۱ + \text{ھ مم ی}(۱+\text{ضا})$

جہاں $|\text{ضا}|$، ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسلئے

$$\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \frac{1}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left\{۱+\text{ھ مم ی}(۱+\text{ضا})\right\}$$

$$= \text{مم ی}(۱+\text{ضا})(۱+\text{ضاَ})$$

جہاں $|\text{ضاَ}|$، ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس

$$\text{نہا}_{\text{ھ}=0}\ \frac{1}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \text{مم ی}$$

اب یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب، ی کوئی حقیقی یا ملتف عدد ہو جو π کا صحیح عددی ضعف نہیں ہے تو مم ی اس مستدق سلسلہ

$$\frac{1}{\text{ی}} + \frac{1}{\text{ی}+\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} + \dots، \dots (۷)$$

کا، یا

$$\frac{1}{\text{ی}} + 2\text{ی}\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{1}{\text{ی}^2-\text{ن}^2\pi^2}، \dots\dots (۸)$$

کا مجموعہ ہے۔

شکل (۷) میں سلسلہ بالاتیم مستدق ہے اور شکل (۸) میں وہ مطلقاً مستدق ہے، بجز ی $= 0، \pm\pi، \pm 2\pi، \dots$ کے اور ان قیمتوں کے لئے یہ سلسلہ ممتنع ہے۔

مندرجۂ صدر تحقیق کی ضرورت جتانے کے لئے یہ بتانا کافی ہے کہ اگر ف(ی)، مستدق سلسلہ $\text{ع}_1(\text{ی}) + \text{ع}_2(\text{ی}) + \dots + \text{ع}_{\text{ن}}(\text{ی}) + \dots$ کا مجموعہ ہو تو ہمیں یہ مان لینے کا کوئی حق نہیں ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{ھ}=0}\ \frac{\text{ف}(\text{ی}+\text{ھ})-\text{ف}(\text{ی})}{\text{ھ}} = \sum_{1}^{\infty} \text{نہا}_{\text{ھ}=0}\ \frac{\text{ع}_{\text{ر}}(\text{ی}+\text{ھ})-\text{ع}_{\text{ر}}(\text{ی})}{\text{ھ}}$$

(358)

فرض کرو کہ اِس سلسلہ کا باقی م رقموں کے بعد ب$_م$(ی) ہے تو

$$ف(ی) = ع_۱(ی) + ع_۲(ی) + \ldots + ع_م(ی) + ب_م(ی)$$

$$ف'(ی+ھ) = ع_۱(ی+ھ) + ع_۲(ی+ھ) + \ldots + ع_م(ی+ھ) + ب_م(ی+ھ)$$

اسلئے $\text{نہا}_{ھ=۰} \frac{ف(ی+ھ) - ف(ی)}{ھ} = \sum_۱^م \text{نہا}_{ھ=۰} \frac{ع_ر(ی+ھ) - ع_ر(ی)}{ھ}$

$$+ \text{نہا}_{ھ=۰} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ}$$

اب چونکہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے ب$_م$(ی)، ب$_م$(ی + ھ) لاانتہا چھوٹے ہو جاتے ہیں جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن یہ نتیجہ نکلنا ضروری نہیں کہ $\text{نہا}_{ھ=۰} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ}$ بھی لاانتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

صرف اسوقت جبکہ یہ انتہا یعنی $\text{نہا}_{ھ=۰} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ}$ لاانتہا چھوٹی ہو مشتق سلسلہ کو ف (ی) کے مشتق تفاعل کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر ب$_م$(ی) کی شکل $\frac{۱}{م}$ جب م ی ہوتی تو ہم دیکھتے کہ

$$\text{نہا} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ} = ۱ \text{ جم م ی}$$

جو صفر کی طرف مستدق نہیں ہوتا جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن قیمتوں ± ۱ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔

۲۹۴ — جملہ

$$\text{جم ی} = \left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴ی^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴ی^۲}{۵^۲\pi^۲}\right)\ldots\ldots$$

سے دفعہ ماسبق کے مماثل طریقہ استعمال کرکے ہم لامتناہی سلسلہ

$$\text{مس ی} = \frac{1}{\text{ی}+\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}+\frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{3}{2}\pi} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\text{ی}+\frac{1}{2}(2\text{م}-1)\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{1}{2}(2\text{م}-1)\pi} + \cdots \quad (9)$$

$$\text{یا} \quad \text{مس ی} = 8\,\text{ی} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2\text{م}-1)^2\pi^2 - 4\text{ی}^2} \quad \ldots\ldots (10)$$

حاصل کرتے ہیں۔ سلسلہ (۹) نیم مستدق ہے لیکن سلسلہ (۱۰) مطلقاً مستدق ہے ی کی سب قیمتوں کے لئے بجز $\pm\frac{1}{2}\pi$، $\pm\frac{3}{2}\pi$، $\pm\frac{5}{2}\pi$، … کے

۲۹۵ — ضابطوں $\text{قم ی} = \text{مم}\,\frac{1}{2}\text{ی} - \text{مم ی}$، یا $\text{قم ی} = \frac{1}{2}\,\text{مم}\,\frac{1}{2}\text{ی} + \frac{1}{2}\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ی}$ کے ذریعہ قم ی کے لئے سلسلہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ پہلے ضابطہ کو لیکر اس میں مماس التماموں کی بجائے ان کے سلسلے درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قم ی} = \left[\frac{2}{\text{ی}} + \frac{2}{\text{ی}+2\pi} + \frac{2}{\text{ی}-2\pi} + \frac{2}{\text{ی}+4\pi} + \frac{2}{\text{ی}-4\pi} + \cdots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{\text{ی}} + \frac{1}{\text{ی}+\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} + \cdots\right]$$

(359)

پس قم ی

$$= \frac{1}{\text{ی}} - \frac{1}{\text{ی}+\pi} - \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} - \frac{1}{\text{ی}+3\pi} - \frac{1}{\text{ی}-3\pi} + \cdots$$

$$\ldots\ldots\ldots (11)$$

یا $$\text{قم ی} = \frac{1}{\text{ی}} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\text{ر}}\, 2\,\text{ی}}{(\text{ی}^2 - \text{ر}^2 \pi^2)} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

ضابطہ (۱۱) میں ی کو ی + $\frac{1}{2}\pi$ میں تبدیل کرو تو

$$\text{قط ی} = \left(\frac{1}{\text{ی}+\frac{1}{2}\pi} - \frac{1}{\text{ی}-\frac{1}{2}\pi}\right) - \left(\frac{1}{\text{ی}+\frac{3}{2}\pi} - \frac{1}{\text{ی}-\frac{3}{2}\pi}\right) + \ldots\ldots \text{،} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

یا $$\text{قط ی} = 4 \sum \frac{(-1)^{\text{ر}-1} (2\text{ر}-1)\pi}{(2\text{ر}-1)^2\pi^2 - 4\text{ی}^2} \text{،} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

اس سلسلہ کی عام رقم جبکہ ر بڑا ہو قیمت $\frac{(-1)^{\text{ر}-1}}{2\text{ر}-1}$ کے قریب آتی ہے،
اس لئے یہ سلسلہ صرف نیم مستدق ہے۔

مماس التمامی اور مماسی سلسلے حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں
جب (ی + ھ) اور جب ی کے لئے لامتناہی حاصل ضربوں کے جو سلسلے ہیں انکو استعمال کرو تو عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \left(1+\frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right)\left(\frac{\pi^2 - \text{ی}^2 - \text{ھ}^2 - 2\,\text{ھ ی}}{\pi^2 - \text{ی}^2}\right)\left(\frac{2^2\pi^2 - \text{ی}^2 - \text{ھ}^2 - 2\,\text{ھ ی}}{2^2\pi^2 - \text{ی}^2}\right) \ldots\ldots$$

اب اگر ہم مان لیں کہ بائیں جانب کا حاصل ضرب عمل ضرب کی تکمیل سے ھ کی قوتوں میں پھیلایا جاسکتا ہے اور اگر ہم دائیں جانب کو شکل جم ھ + جیب ھ قم ی میں رکھیں تو ھ کی قوتوں میں پھیلانے اور مساوات کی طرفین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{قم ی} = \frac{1}{\text{ی}} + \frac{2\,\text{ی}}{\text{ی}^2 - \pi^2} + \frac{2\,\text{ی}}{\text{ی}^2 - 2^2\pi^2} + \ldots\ldots \text{،} \quad (۸)$$

ہم نے یہ جو مان لیا ہے کہ وہ لامتناہی حاصل ضرب جسکے سر معمولی عمل ضرب سے حاصل شدہ لامتناہی سلسلے ہیں ھ کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں

ترتیب دیا جا سکتا ہے اِسکی واجبیت کے لئے اُن شرطوں کی تحقیق کرنی ہو گی کہ ایسے عمل سے صحیح نتیجہ پیدا ہو، لیکن اس کے لئے بعض عام مسئلوں کی ضرورت پڑیگی جنکو بیان کرنے کی یہاں گنجائش نہیں ہے ۔

مماسی سلسلہ بھی اسی طرح لامتناہی حاصل ضرب

$$\frac{\text{جم}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جم ی}} = \left(\frac{\pi^2 - 4\,\text{ی}^2 - 4\,\text{ھ}^2 - 8\,\text{ھ ی}}{\pi^2 - 4\,\text{ی}^2}\right)\left(\frac{3^2\pi^2 - 4\,\text{ی}^2 - 4\,\text{ھ}^2 - 8\,\text{ھ ی}}{3^2\pi^2 - 4\,\text{ی}^2}\right)\cdots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

اگر ی کے مماس التمام کو شکل

$$\pi\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{(2\text{م}-1)^2\pi^2}\right) \Big/ \text{ی}\,\pi\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)$$

میں بیان کیا جائے اور اِس جملہ کو جزوی کسروں میں تحویل کیا جائے جنکے نسب نما جملہ $\text{ی}\,\pi\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)$ کے اجزائے ضربی ہوں تو ہمیں سلسلہ (۸) حاصل ہونا چاہئے، یہ بات مس ی، قط ی، قم ی پر بھی اسی طرح صادق آتی ہے ۔ یہ سلسلے گلیشر نے بالراست اِس عمل تحویل کی تکمیل سے حاصل کئے تھے[۱]

دلیل کی قوتوں میں مماس، مماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کو بیان کرنا

(360)

۲۹۶ ۔ دفعہ ۲۹۳ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ

$$\text{مم ی} = \frac{1}{\text{ی}} - \sum_{1}^{\text{م}} \frac{2\,\text{ی}}{\text{ر}^2\pi^2 - \text{ی}^2} + \text{ب}_{\text{م}}$$

جہاں ب م ایک عدد ہے جسکو م کے کافی بڑا لینے سے اسقدر

---

[۱] دیکھو Quarterly Journal, vol. xvii; Glaisher

چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں ۔ اب اگر ی کا مقیاس $\text{ر}\pi$ سے کم ہو تو

$$\frac{۱}{\text{ر}^۲\pi^۲-\text{ی}^۲}=\frac{۱}{\text{ر}^۲\pi^۲}\left(۱+\frac{\text{ی}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}+\frac{\text{ی}^۴}{\text{ر}^۴\pi^۴}+\cdots+\frac{\text{ی}^{۲\text{س}}}{\text{ر}^{۲\text{س}}\pi^{۲\text{س}}}+\cdots\right)$$

پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ ی کا مقیاس π سے کم ہے تو کسروں $\frac{۱}{\text{ر}^۲\pi^۲-\text{ی}^۲}$ میں سے ہر ایک کو اس طریقہ پر پھیلا سکتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر سلسلہ مطلقاً مستدق ہے ہم نتیجہ کو ی کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے ۔

$$\text{م ی}=\frac{۱}{\text{ی}}-\frac{۲\text{ی}}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{\text{م}^۲}\right)-\frac{۲\text{ی}^۳}{\pi^۴}\left(\frac{۱}{۱^۴}+\frac{۱}{۲^۴}+\cdots+\frac{۱}{\text{م}^۴}\right)$$

$$-\cdots-\frac{۲\text{ی}^{۲\text{ن}-۱}}{\pi^{۲\text{ن}}}\left(\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}}+\frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}}+\cdots+\frac{۱}{\text{م}^{۲\text{ن}}}\right)-\cdots$$

$\cdots+\text{ب}^{\text{م}}$

فرض کرو کہ $\text{ھ}_{۲\text{ن}}$ سے مستدق سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}}+\frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}}+\cdots+\frac{۱}{\text{م}^{۲\text{ن}}}+\cdots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، تب $\text{ھ}_{۲\text{ن}}=\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}}+\frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}}+\cdots+\frac{۱}{\text{م}^{۲\text{ن}}}+\text{ص}_{۲\text{ن}}$ جہاں $\text{ص}_{۲\text{ن}}$ ایک عدد ہے جو م کو کافی بڑا لینے سے اسقدر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں ۔

$$\text{تب م ی}=\frac{۱}{\text{ی}}-\frac{۲\text{ی}}{\pi^۲}\text{ھ}_۲-\frac{۲\text{ی}^۳}{\pi^۴}\text{ھ}_۴-\cdots-\frac{۲\text{ی}^{۲\text{ن}-۱}}{\pi^{۲\text{ن}}}\text{ھ}_{۲\text{ن}}-\cdots$$

$$+\ \text{ب}_{\text{م}} + \frac{\text{۲ی}}{\pi^{۲}}\text{ص}_{۲} + \frac{\text{۲ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{ص}_{۴} + \ldots + \frac{\text{۲ی}^{\text{۲ن-۱}}}{\pi^{\text{۲ن}}}\text{ص}_{\text{۲ن}} + \ldots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ص}_{۲} > \text{ص}_{۴} > \text{ص}_{۶} \ldots$، پس

$$\frac{\text{۲ی}}{\pi^{۲}}\text{ص}_{۲} + \frac{\text{۲ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{ص}_{۴} + \ldots\ldots$$

کا مقیاس $< \text{ص}_{۲}\left(\frac{۲|\text{ی}|}{\pi^{۲}} + \frac{۲|\text{ی}|^{۳}}{\pi^{۴}} + \ldots\ldots\right)$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے کیونکہ مق ی $< \pi$،
اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے $\sum \frac{\text{۲ی}^{\text{۲ن-۱}}}{\pi^{\text{۲ن}}}\text{ص}_{\text{۲ن}}$ کے مقیاس کو اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ پس ہم ی کے لئے یہ لامتناہی سلسلہ ملتا ہے

$$\text{مم ی} = \frac{۱}{\text{ی}} - \frac{\text{۲ی}}{\pi^{۲}}\text{ص}_{۲} - \frac{\text{۲ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{ص}_{۴} - \frac{\text{۲ی}^{۵}}{\pi^{۶}}\text{ص}_{۶} - \ldots \quad (۱۵)$$

جو ی کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے ایسی کہ مق ی $< \pi$،
اور بالخصوص $\pm\pi$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔ (361)

مسئلہ

$$\text{مس ی} = ۸\sum_{۱}^{\text{م}} \frac{\text{ی}}{(\text{۲ر}-۱)^{۲}\pi^{۲} - \text{۴ی}^{۲}} + \text{ب}_{\text{م}}$$

سے اسی طریقہ پر مس ی کے لئے سلسلہ ی کی صعودی قوتوں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ کو متماثلہ مس ی = مم ی − ۲مم ۲ی کے ذریعہ بھی (۱۵) سے اخذ کرسکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{مس ی} = \frac{۲(۲^{۲}-۱)\text{ی}}{\pi^{۲}}\text{ص}_{۲} + \frac{۲(۲^{۴}-۱)\text{ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{ص}_{۴} + \frac{۲(۲^{۶}-۱)\text{ی}^{۵}}{\pi^{۶}}\text{ص}_{۶} + \ldots\ldots \quad (۱۶)$$

جو درست ہے اگر ی کا مقیاس $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہو، اور بالخصوص $\pm\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

ضابطہ قم ی = مم $\frac{۱}{۲}$ ی - مم ی میں مم $\frac{۱}{۲}$ ی، مم ی کی بجائے انکی قیمتیں (۱۵) سے لیکر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم ی} = \frac{۱}{\text{ی}} + (۲-۱)\frac{\text{ی}}{\pi^۲}\text{ب}_۲ + \frac{۲^۳-۱}{۲^۳}\times\frac{\text{ی}^۳}{\pi^۴}\text{ب}_۴ + \frac{۲^۵-۱}{۲^۵}\times\frac{\text{ی}^۵}{\pi^۶}\text{ب}_۶ + \ldots\ldots \quad (۱۷)$$

جو درست رہتا ہے اگر مق ی $< \pi$ ۔

۲۹۷ — ی کی قوتوں میں قط ی کے لئے سلسلہ حاصل کرنیکے لئے ضابطہ

$$\text{قط ی} = ۴\pi\left(\frac{۱}{\pi^۲-۴\text{ی}^۲} - \frac{۳}{۳^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲} + \frac{۵}{۵^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲} - \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}(۲\text{م}-۱)}{(۲\text{م}-۱)^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲}\right) + \text{بَ}_{\text{م}}$$

استعمال کیا جاتا ہے جبکہ یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ ی کا مقیاس $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہے۔ ہر کسر کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قط ی} = \frac{۲^۲}{\pi}\left\{\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}}{۲\text{م}-۱}\right\} + \frac{۲^۴}{\pi^۳}\text{ی}^۲\left\{\frac{۱}{۱^۳} - \frac{۱}{۳^۳} + \frac{۱}{۵^۳} - \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}}{(۲\text{م}-۱)^۳}\right\} + \ldots + \frac{۲^{۲\text{ن}+۲}}{\pi^{۲\text{ن}+۱}}\text{ی}^{۲\text{ن}}\left\{\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}+۱}} - \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}+۱}} + \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}}{(۲\text{م}-۱)^{۲\text{ن}+۱}}\right\} + \ldots + \text{بَ}_{\text{م}}$$

(362)

اب فرض کرو کہ $ص_{۲ن+۱}$ سے لامتناہی سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^{۲ن+۱}} - \frac{۱}{۳^{۲ن+۱}} + \frac{۱}{۵^{۲ن+۱}} - \ldots\ldots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اور فرض کرو پہلی م رقموں کے بعد کا باقی $صہ_{۲ن+۱}$ ہے، تب

$$قط ی = \frac{۲^{۲}}{\pi} ص_{۱} + \frac{۲^{۴}}{\pi^{۳}} ی^{۲} ص_{۳} + \ldots + \frac{۲^{۲ن+۲}}{\pi^{۲ن+۱}} ی^{ن} ص_{۲ن+۱} + \ldots$$

$$+ ب_{م} + \frac{۲^{۲}}{\pi} صہ_{۱} + \frac{۲^{۴}}{\pi^{۳}} ی^{۲} صہ_{۳} + \ldots\ldots$$

فرض کرو کہ عددوں $صہ_{۱}$، $صہ_{۳}$، $صہ_{۵}$ ... میں سے بڑے سے بڑا عدد $صہَ$ ہے تو $\frac{۲^{۲}}{\pi} صہ_{۱} + \frac{۲^{۴}}{\pi^{۳}} ی^{۲} صہ_{۳} + \ldots$ کا مقیاس، سلسلہ

$$\frac{۲^{۲}}{\pi} + \frac{۲^{۴}}{\pi^{۳}} |ی|^{۲} + \frac{۲^{۶}}{\pi^{۵}} |ی|^{۴} + \ldots\ldots$$

کے مجموعے کے $صہَ$ گنا سے کم ہے، یہ آخری سلسلہ مستدق ہے کیونکہ ی کا مقیاس بموجب فرض $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ اُس سلسلہ کا باقی جو ہم نے قط ی کے لئے حاصل کیا ہے ایک عدد ہے جسکا مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے جیسے م بڑھتا ہے، اس لئے قط ی کے لئے لامتناہی سلسلہ ملتا ہے

$$قط ی = \frac{۲^{۲}}{\pi} ص_{۱} + \frac{۲^{۴}}{\pi^{۳}} ی^{۲} ص_{۳} + \frac{۲^{۶}}{\pi^{۵}} ی^{۴} ص_{۵} + \ldots\ldots \quad (۱۸)$$

جو درست ہے اگر مق ی $< \frac{۱}{۲}$ ۲۲۔

۲۹۸ — جبر و مقابلہ کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ تفاعل $\frac{ی}{و^{ی}-۱}$ کو

جہاں $و^{ی}$ اپنی صدر قیمت رکھتا ہے شکل

$$۱-\frac{۱}{۲}ی+\frac{ب_۱}{\lfloor ۲}ی^۲-\frac{ب_۲}{\lfloor ۴}ی^۴+\dots+(-۱)^{ن-۱}\frac{ب_ن}{\lfloor ۲ن}ی^{۲ن}+\dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں ب۱، ب۲، ... ، بن، ...
خاص عدد ہیں جنکو برنولی (Bernouilli) کے عدد کہتے ہیں،
اور نیز یہ کہ یہ پھیلاؤ ی کی اُن تمام قیمتوں کے لئے درست ہے جنکے لئے
سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

اگر ہم اِس کو $و^{ی}-۱$ سے ضرب دیں تو

$$ی=\left\{ی+\frac{ی^۲}{\lfloor ۲}+\dots+\frac{ی^{ن}}{\lfloor ن}+\dots\right\}\left\{۱-\frac{۱}{۲}ی+\frac{ب_۱}{\lfloor ۲}ی^۲\right.$$

$$\left.-\frac{ب_۲}{\lfloor ۴}ی^۴+\dots+(-۱)^{ن-۱}\frac{ب_ن}{\lfloor ۲ن}ی^{۲ن}+\dots\right\}$$

جہاں |ی| کو اتنا چھوٹا لیا گیا ہے کہ بائیں جانب کے دونوں سلسلے
مطلقاً مستدق ہیں۔ اِن سلسلوں کو باہم ضرب دیکر حاصل ضرب کو ی (363)
کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ یہ محصلہ
سلسلہ مطلقاً مستدق ہوگا، اسلئے ی کی پہلی قوت سے اعلیٰ تر قوتوں کے
سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے

$$\frac{\text{ب}_1}{\lfloor 2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}=0\ ,\quad -\frac{\text{ب}_2}{\lfloor 4}+\frac{\text{ب}_1}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{\lfloor 3}-\frac{1}{\lfloor 4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\lfloor 5}=0\ ,$$

وغیرہ، جنکی عام شکل ہے

$$\frac{\text{ب}_{ن}}{\lfloor 2ن}-\frac{1}{\lfloor 3}\cdot\frac{\text{ب}_{ن-1}}{\lfloor 2ن-2}+\cdots+\frac{(-1)^{ن}}{\lfloor 2ن-1}\cdot\frac{\text{ب}_1}{\lfloor 2}$$

$$-\frac{(-1)^{ن-1}}{\lfloor 2ن}\cdot\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{ن}}{\lfloor 2ن+1}=0$$

ان مساواتوں کے ذریعہ عددوں ب_1، ب_2، ... کو محسوب کیا جا سکتا ہے، چنانچہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ب}_1=\frac{1}{6}\ ،\ \text{ب}_2=\frac{1}{30}\ ،\ \text{ب}_3=\frac{1}{42}\ ،\ \text{ب}_4=\frac{1}{30}\ ،\ \text{ب}_5=\frac{5}{66}\ ،$$

$$\text{ب}_6=\frac{691}{2730}\ ،\ \text{ب}_7=\frac{7}{6}\ ،\ \text{وغیرہ}$$

۲۹۹ — مم ی، مس ی، قم ی کے پھیلاؤں میں (جو ی کی قوتوں میں حاصل کیے جا چکے ہیں) سروں کو برنولی کے عددوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ
$$\text{مم ی}=\text{خ}\,\frac{\text{ق}^{\text{خ ی}}+\text{ق}^{-\text{خ ی}}}{\text{ق}^{\text{خ ی}}-\text{ق}^{-\text{خ ی}}}=\text{خ}\left(1+\frac{2}{\text{ق}^{2\text{خ ی}}-1}\right)$$

اسلئے اگر مق ی کافی چھوٹا ہو تو

$$\text{مم ی}=\frac{1}{\text{ی}}-\frac{2^2\,\text{ب}_1}{\lfloor 2}\,\text{ی}-\frac{2^4\,\text{ب}_2}{\lfloor 4}\,\text{ی}^3-\cdots-\frac{2^{2ن}\,\text{ب}_{ن}}{\lfloor 2ن}\,\text{ی}^{2ن-1}-\cdots \quad (19)$$

نیز قم ی = مم $\frac{۱}{۲}$ ی - مم ی، اسلئے

$$\text{قم ی} = \frac{۱}{\text{ی}} + \frac{۲(۲-۱)\text{ب}_۱}{\lfloor ۲}\,\text{ی} + \frac{۲(۲^۳-۱)\text{ب}_۲}{\lfloor ۴}\,\text{ی}^۳ + \ldots$$

$$+ \frac{۲(۲^{۲\text{ن}-۱}-۱)\text{ب}_\text{ن}}{\lfloor ۲\text{ن}}\,\text{ی}^{۲\text{ن}-۱} + \ldots،\ \ldots (۲۰)$$

نیز چونکہ مس ی = مم ی - ۲ مم ۲ ی، اسلئے

$$\text{مس ی} = \frac{۲^۲(۲^۲-۱)\text{ب}_۱}{\lfloor ۲}\,\text{ی} + \frac{۲^۴(۲^۴-۱)\text{ب}_۲}{\lfloor ۴}\,\text{ی}^۳ + \ldots$$

$$+ \frac{۲^{۲\text{ن}}(۲^{۲\text{ن}}-۱)\text{ب}_\text{ن}}{\lfloor ۲\text{ن}}\,\text{ی}^{۲\text{ن}-۱} + \ldots،\ \ldots (۲۱)$$

یہ ثابت کیا جاچکا ہے کہ سلسلے (۱۹) اور (۲۰) مستدق ہیں اگر مق ی $< \pi$ اور سلسلہ (۲۱) مستدق ہے اگر مق ی $< \frac{۱}{۲}\pi$ - سلسلے (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) علی الترتیب سلسلوں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) کے مماثل ہونے چاہئیں، پس (۱۹) کے سروں کو (۱۵) کے سروں کے مساوی رکھنے سے

(364)

$$\frac{۲}{\pi^۲}\text{م}_۲ = \frac{۲^۲}{\lfloor ۲}\text{ب}_۱،\quad \frac{۲}{\pi^۴}\text{م}_۴ = \frac{۲^۴}{\lfloor ۴}\text{ب}_۲،\ \ldots،\ \frac{۲}{\pi^{۲\text{ن}}}\text{م}_{۲\text{ن}} = \frac{۲^{۲\text{ن}}}{\lfloor ۲\text{ن}}\text{ب}_\text{ن}،$$

اس لئے دفعہ ۲۹۸ میں دی ہوئی ب$_۱$، ب$_۲$، ... کی قیمتوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}_۲ = \frac{\pi^۲}{۶}،\quad \text{م}_۴ = \frac{\pi^۴}{۹۰}،\quad \text{م}_۶ = \frac{\pi^۶}{۹۴۵}،\quad \text{م}_۸ = \frac{\pi^۸}{۹۴۵۰}،\ \ldots$$

$$ص_{۲ن} = \frac{۲^{۲ن-۱}\,\pi^{۲ن}}{\underline{|۲ن}}\, ب_ن$$

اس طرح ص۲ن اُن ضابطوں کی مدد سے محسوب کیا جا سکتا ہے جن سے بن ملتا ہے۔ سلسلے (۱۹) اور (۲۱) کسی زاویے کے مماس یا مماس التمام کو محسوب کرنے میں راست استعمال کئے جا سکتے ہیں، ان سلسلوں کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$مم\,لا = \frac{۱}{لا} - \frac{لا}{۳} - \frac{لا^{۳}}{۴۵} - \frac{۲لا^{۵}}{۹۴۵} - \cdots،$$

$$مس\,لا = لا + \frac{لا^{۳}}{۳} + \frac{۲لا^{۵}}{۱۵} + \frac{۱۷لا^{۷}}{۳۱۵} + \cdots$$

مس $(\frac{م}{ن} \times ۹۰^\circ)$، مم $(\frac{م}{ن} \times ۹۰^\circ)$ کو محسوب کرنیکا عمل حسب طریقہ ذیل انجام پا سکتا ہے :-

مس (م \ ن × ۹۰°) =

۲ م ن \ (ن² − م²) × ٫۶۳۶۶۱۹۷۷۲۳۶۷۵

+ م \ ن × ٫۲۹۷۵۵۶۷۸۲۰۵۹۷

+ م³ \ ن³ × ٫۰۱۸۶۸۸۶۵۰۲۷۷۳

+ م⁵ \ ن⁵ × ٫۰۰۱۸۴۲۴۷۵۲۰۳۴

+ م⁷ \ ن⁷ × ٫۰۰۰۱۹۷۵۸۰۰۷۱۴

+ م⁹ \ ن⁹ × ٫۰۰۰۰۲۱۶۹۷۷۲۴۵

+ م¹¹ \ ن¹¹ × ٫۰۰۰۰۰۲۴۰۱۱۳۷۰

+ م¹³ \ ن¹³ × ٫۰۰۰۰۰۰۲۶۶۴۱۳۲

+ م¹⁵ \ ن¹⁵ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۲۹۵۸۶۴

+ م¹⁷ \ ن¹⁷ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲۸۶۷

+ $م^{۱۹}$ \ $ن^{۱۹}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۶۵۱ ء

+ $م^{۲۱}$ \ $ن^{۲۱}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۰۵ ء

+ $م^{۲۳}$ \ $ن^{۲۳}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۵ ء

+ $م^{۲۵}$ \ $ن^{۲۵}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵ ء

جم (م \ ن × ۹۰°) =

ن \ م × ۶۳۶۶۱۹۷۷۲۳۶۷۵۸۱ ء

− ۴ م ن \ (۴ $ن^{۲}$ − $م^{۲}$) × ۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷ ء

− م \ ن × ۳۰۵۲۸۸۸۸۹۴۱۴۵ ء

− $م^{۳}$ \ $ن^{۳}$ × ۰۰۶۵۵۱۰۷۴۷۸۸۲ ء

− $م^{۵}$ \ $ن^{۵}$ × ۰۰۰۳۴۵۰۲۹۲۵۵۴ ء

− $م^{۷}$ \ $ن^{۷}$ × ۰۰۰۰۲۰۲۷۹۱۰۶۰ ء

− $م^{۹}$ \ $ن^{۹}$ × ۰۰۰۰۰۱۲۳۶۶۵۲۷ ء

− $م^{۱۱}$ \ $ن^{۱۱}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۷۶۴۹۵۹ ء

− $م^{۱۳}$ \ $ن^{۱۳}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۷۵۹۷ ء

− $م^{۱۵}$ \ $ن^{۱۵}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۹۶۹ ء

− $م^{۱۷}$ \ $ن^{۱۷}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۸۵ ء

− $م^{۱۹}$ \ $ن^{۱۹}$ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱ ء

اِن جملوں میں رقموں $\frac{۸ی}{\pi^۲ - ۴ی^۲}$ ، $\frac{۱}{ی}$ - $\frac{۲ی}{\pi^۲ - ی^۲}$ کو جو ضابطوں (۱۰)
اور (۸) میں واقع ہوتی ہیں الگ الگ اول محسوب کر لیا جاتا ہے، تب اِن
رقموں کے بعد یہ سلسلے زیادہ سرعت کے ساتھ مستدق ہوتے ہیں۔
یہ سلسلے یولر کی Analysis of the Infinite سے لئے گئے ہیں
جس میں اِنکو اُس نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک معلوم کیا ہے۔

(365)

لوکارتمی جیب اور جیب التمام کیلئے جملے

۳۰۰ ــ دفعہ ۲۸۵ میں ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ

$$جب\ ی = ی\left(۱ - \frac{ی^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{ی^۲}{\pi^۲ ۲^۲}\right) \cdots \left(۱ - \frac{ی^۲}{\pi^۲ م^۲}\right)(۱ - ط_م)،$$

$$جم\ ی = \left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲ ۳^۲}\right) \cdots \left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲ (۲م - ۱)^۲}\right)(۱ - ط'_م)،$$

جہاں $ط_م$، $ط'_م$ ایسے عدد ہیں جنکے مقیاس، م کو کافی بڑا لینے سے
اتنے چھوٹے بنائے جا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اب لوکارتم لینے سے

$$لوک\ جب\ ی = لوک\ ی + لوک\left(۱ - \frac{ی^۲}{\pi^۲}\right) + لوک\left(۱ - \frac{ی^۲}{\pi^۲ ۲^۲}\right) + \cdots$$

$$+ لوک\left(۱ - \frac{ی^۲}{\pi^۲ م^۲}\right) + لوک(۱ - ط_م)،$$

$$لوک\ جم\ ی = لوک\left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲}\right) + لوک\left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲ ۳^۲}\right) + \cdots$$

$$+ لوک\left(۱ - \frac{۴ی^۲}{\pi^۲ (۲م - ۱)^۲}\right) + لوک(۱ - ط'_م)،$$

تا پہلی صورت میں مان لو کہ |ی| < π اور دوسری صورت میں < π/۲
تاکہ یہ لوکارتم ی کی قوتوں میں مطلقاً مستدق سلسلوں میں پھیلائے جاسکیں، تب ان لوکارتموں کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}\right)\frac{\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}$$
$$+\ \text{لوک}\ (1-\text{ط}_\text{م})\ ،$$

$$\text{لوک جم ی} = -\sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{3^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{(2\text{م}-1)^{2\text{ن}}}\right)\frac{2^{2\text{ن}}\,\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}$$
$$+\ \text{لوک}\ (1-\text{ط}'_\text{م})\ ،$$

اب

$$\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\frac{1}{3^{2\text{ن}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{3^{2\text{ن}}}+\frac{1}{5^{2\text{ن}}}+\cdots\right)+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}\left(\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\frac{1}{3^{2\text{ن}}}+\cdots\right)$$

اس لئے

$$\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{3^{2\text{ن}}}+\frac{1}{5^{2\text{ن}}}+\cdots\cdots = \frac{2^{2\text{ن}}-1}{2^{2\text{ن}}}\,\text{م}_{2\text{ن}}\ ،$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے (366)

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum \frac{\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{م}_{2\text{ن}} + \sum \frac{\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{ص}_{2\text{ن}} + \text{لوک}\,(1-\text{ط}_\text{م})\ ،$$

$$\text{لوک جم ی} = -\sum \frac{2^{2\text{ن}}-1}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{ی}^{2\text{ن}}\,\text{م}_{2\text{ن}} + \sum \frac{2^{2\text{ن}}\,\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{ض}_{2\text{ن}} + \text{لوک}\,(1-\text{ط}'_\text{م})$$

جہاں سلسلوں

$$\frac{۱}{۱^{۲ن}} + \frac{۱}{۲^{۲ن}} + \dots ،\quad \frac{۱}{۱^{۲ن}} + \frac{۱}{۳^{۲ن}} + \dots\dots$$

کی م رقموں کے بعد کے باقی $ص_{۲ن}$، $ض_{۲ن}$ ہیں۔

$\sum \frac{ی^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}\, ص_{۲ن}$ کا مقیاس $ص \sum \frac{|ی|^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}$ سے کم ہے اور

$\sum \frac{۲^{۲ن}\, ی^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}\, ض_{۲ن}$ کا مقیاس $ض \sum \frac{۲^{۲ن}\,|ی|^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}$ سے کم ہے جہاں

$ص$، $ض$ علی الترتیب $ص_{۲ن}$، $ض_{۲ن}$ کی بڑی سے بڑی قیمتیں ہیں۔ پس

$$لوک\, \frac{جب\, ی}{ی} = -\sum \frac{ی^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}\, م_{۲ن} ،$$

$$لوک\, جم\, ی = \sum \frac{۲^{۲ن} - ۱}{ن\,\pi^{۲ن}}\, ی^{۲ن}\, م_{۲ن}$$

اب چونکہ $م_{۲ن} = \frac{۲^{۲ن-۱}\,\pi^{۲ن}}{|\underline{۲ن}}\, ب_ن$ اسلئے $لوک\, \frac{جب\, ی}{ی}$،

$لوک\, جم\, ی$ کے لئے حسب ذیل لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں

$$لوک\, \frac{جب\, ی}{ی} = -۲\, \frac{ب_۱}{۱}\, \frac{ی^۲}{|\underline{۲}} - ۲^۳\, \frac{ب_۲}{۲}\, \frac{ی^۴}{|\underline{۴}} - \dots\dots$$

$$\dots - ۲^{۲ن-۱}\, \frac{ب_ن}{ن}\, \frac{ی^{۲ن}}{|\underline{۲ن}} - \dots\dots ، \dots (۲۲)$$

جہاں مق ی $< \pi$ ،

$$\text{لوک جم ی} = -۲(۲^{۲}-۱)\frac{ب_{۱}}{۱}\cdot\frac{ی^{۲}}{|\underline{۲}} - ۲^{۳}(۲^{۴}-۱)\frac{ب_{۲}}{۲}\cdot\frac{ی^{۴}}{|\underline{۴}} - \cdots$$

$$- ۲^{۲ن-۱}(۲^{۲ن}-۱)\frac{ب_{ن}}{ن}\cdot\frac{ی^{۲ن}}{|\underline{۲ن}} - \cdots\text{،} \qquad (۲۳)$$

جہاں مق ی $< \frac{۱}{۲}\pi$ ۔

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$\text{لوک}\frac{\text{جب ی}}{ی} = -\frac{ی^{۲}}{۶} - \frac{ی^{۴}}{۱۸۰} - \frac{ی^{۶}}{۲۸۳۵} - \cdots\text{،}$$

$$\text{لوک جم ی} = -\frac{ی^{۲}}{۲} - \frac{ی^{۴}}{۱۲} - \frac{ی^{۶}}{۴۵} - \cdots$$

اسلئے نیز

$$\text{لوک مس ی} = \text{لوک ی} + \frac{ی^{۲}}{۳} + \frac{۷ی^{۴}}{۳۰} + \frac{۶۲ی^{۶}}{۲۸۳۵} + \cdots$$

(367) سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے، سب سے بہتر یہ ہے کہ لوکارتموں لوک $(۱-\frac{ی^{۲}}{\pi^{۲}})$، لوک $(۱-\frac{۴ی^{۲}}{\pi^{۲}})$ کے پہلے لوکارتم الگ الگ محسوب کر لئے جائیں کیونکہ اس طرح یہ سلسلے (۲۲)، (۲۳) کی بہ نسبت تیز تر مستدق شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{لوک جب}\frac{م\pi}{۲ن} = \text{لوک}\,\pi + \text{لوک}\frac{م}{۲ن} + \text{لوک}\left(۱-\frac{م^{۲}}{۴ن^{۲}}\right)$$

$$- \sum\left\{\frac{ب_{ر}}{۲ر}\cdot\frac{\pi^{۲ر}}{|\underline{۲ر}}\left(\frac{۱}{۲^{۲ر}}\right)\frac{م^{۲ر}}{ن^{۲ر}}\right\}\text{،}$$

$$لوک\ جم\ \frac{\pi م}{۲ن} = لوک\left(۱-\frac{م^{۲}}{ن^{۲}}\right) - \Sigma\left\{\frac{۲^{۲ر}-۱}{۲}\ \frac{ب_ر}{ر}\ \frac{\pi^{۲ر}}{|\underline{۲ر}}\left(\frac{۱}{ر}\right)\frac{م^{۲ر}}{ن^{۲ر}}\right\}$$

اِن مساواتوں کی بائیں جانب کے لوکارتموں کو مقیاس ۰؍۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹ سے ضرب دینے سے ہمیں جب $(\frac{م}{ن}\times ۹۰^\circ)$، جم $(\frac{م}{ن}\times ۹۰^\circ)$ کے معمولی لوکارتم اساس ۱۰ پر حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح جو ضابطے ملتے ہیں وہ حسب ذیل ہیں:

ل جب $(م\backslash ن \times ۹۰^\circ)$ =

لوک م + لوک (۲ن - م) + لوک (۲ن + م)

- ۳ لوک ن + ۹؍۵۹۴۰۵۹۸۸۵۷۰۲۱۹۰

- $م^{۲}\backslash ن^{۲}$ × ؍۰۷۰۰۲۲۸۲۷۶۰۵۹۰۱

- $م^{۴}\backslash ن^{۴}$ × ؍۰۰۱۱۱۷۲۶۶۴۴۱۶۶۱

- $م^{۶}\backslash ن^{۶}$ × ؍۰۰۰۰۳۹۲۲۹۱۴۶۴۵۳

- $م^{۸}\backslash ن^{۸}$ × ؍۰۰۰۰۰۱۷۲۹۲۷۰۷۹۸

- $م^{۱۰}\backslash ن^{۱۰}$ × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۸۴۳۶۲۹۸۶

- $م^{۱۲}\backslash ن^{۱۲}$ × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۳۴۸۷۱۵

- $م^{۱۴}\backslash ن^{۱۴}$ × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۱۹۳۱

- $م^{۱۶}\backslash ن^{۱۶}$ × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۵۹

- $م^{۱۸}\backslash ن^{۱۸}$ × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۰۲

- $م^{۲۰}\backslash ن^{۲۰}$ × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۹

ل جم (م \ ن × ۹۰°) =

لوک (ن − م) + لوک (ن + م) − ۲ لوک ن

\+ ۱۰ی۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

− $م^{۲} \backslash ن^{۲}$ × ی۱۰۱۴۹۴۸۵۹۳۴۱۸۹۲

− $م^{۴} \backslash ن^{۴}$ × ی۰۰۳۱۸۷۲۹۴۰۶۵۴۵۱

− $م^{۶} \backslash ن^{۶}$ × ی۰۰۰۲۰۹۴۸۵۸۰۰۰۱۷

− $م^{۸} \backslash ن^{۸}$ × ی۰۰۰۰۱۶۸۴۸۳۴۸۵۹۷

− $م^{۱۰} \backslash ن^{۱۰}$ × ی۰۰۰۰۰۱۴۸۰۱۹۳۹۸۶

− $م^{۱۲} \backslash ن^{۱۲}$ × ی۰۰۰۰۰۰۱۳۶۵۰۲۲۷۲

− $م^{۱۴} \backslash ن^{۱۴}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۱۲۹۸۱۷۱۵

− $م^{۱۶} \backslash ن^{۱۶}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۱۴۷۱

− $م^{۱۸} \backslash ن^{۱۸}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶۷

− $م^{۲۰} \backslash ن^{۲۰}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶

− $م^{۲۲} \backslash ن^{۲۲}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۵۸

− $م^{۲۴} \backslash ن^{۲۴}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۸

− $م^{۲۶} \backslash ن^{۲۶}$ × ی۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۳

اِن سلسلوں کو یولر نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک حاصل کیا تھا۔

مثالیں

۳۰ — (۱) $\sum_{۱}^{\infty} \text{ن}^{-۲}$ ، $\sum_{۱}^{\infty} \text{ن}^{-۴}$ ، $\sum_{۱}^{\infty} (۲\text{ن}-۱)^{-۲}$ ، $\sum_{۱}^{\infty} (۲\text{ن}-۱)^{-۴}$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ $\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum \text{لوک} \left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ن}^{۲}\pi^{۲}}\right)$

$= -\frac{\text{لا}^{۲}}{\pi^{۲}} \sum \frac{۱}{\text{ن}^{۲}} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۲\pi^{۴}} \sum \frac{۱}{\text{ن}^{۴}} - \cdots$

اور نیز $\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{لوک} \left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲۰} - \cdots\right)$

$= -\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۶} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲۰}\right) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۶}\right)^{۲} - \cdots$

اسلئے لوک $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کے اِن دو جملوں میں $\text{لا}^{۲}$ ، $\text{لا}^{۴}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے (368)

$$\sum \text{ن}^{-۲} = \frac{۱}{۶}\pi^{۲} \ ، \ \sum \text{ن}^{-۴} = \frac{۱}{۹۰}\pi^{۴}$$

پھر چونکہ $\text{لوک جم لا} = \sum \text{لوک} \left\{۱ - \frac{۴\text{لا}^{۲}}{(۲\text{ن}-۱)^{۲}\pi^{۲}}\right\}$

$= -\frac{۴\text{لا}^{۲}}{\pi^{۲}} \sum \frac{۱}{(۲\text{ن}-۱)^{۲}} - \frac{۸\text{لا}^{۴}}{\pi^{۴}} \sum \frac{۱}{(۲\text{ن}-۱)^{۴}} \cdots$ ،

اور نیز $\text{لوک جم لا} = \text{لوک} \left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴} - \cdots\right)$

$= -\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴}\right) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)^{۲}$

اس لئے لا^2 اور لا^4 کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma\,(2\text{ن}-1)^{-2} = \frac{1}{8}\pi^2 ،\quad \Sigma\,(2\text{ن}-1)^{-4} = \frac{1}{96}\pi^4$$

(۲) لامتناہی سلسلہ $\frac{1}{1^2+\text{لا}^2} + \frac{1}{3^2+\text{لا}^2} + \frac{1}{5^2+\text{لا}^2} + \ldots$ کو جمع کرو۔

مسئلہ (۱۰) میں رکھو ۲ی = خ لا π، اس طرح اس سلسلہ کا مجموعہ حاصل ہوگا

$$\frac{\pi}{4\,\text{لا}}\ \text{مسنز}\ \frac{1}{2}\pi\,\text{لا}$$

یہ مجموعہ، جمز π لا کے اجزائے ضربی والے جملہ سے لوگارتم لینے اور تفرق کرنے سے بھی راست حاصل کیا جا سکتا تھا۔

(۳) ثابت کرو کہ اُن تمام عددوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{15}{\pi^2}$ ہے جو کسی مفرد عدد کے مربع سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ مفرد عددوں ۲، ۳، ۵، ... کو عہ، بہ، جہ، ... سے تعبیر کیا گیا ہے، تب مطلوبہ مجموعہ اس لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(1+\frac{1}{\text{عہ}^2}\right)\left(1+\frac{1}{\text{بہ}^2}\right)\left(1+\frac{1}{\text{جہ}^2}\right)\ldots\ldots$$

کے مساوی ہے۔ یہ حاصل ضرب

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{\text{عہ}^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{\text{بہ}^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{\text{جہ}^2}\right)^{-1}\ldots\ldots}{\left(1-\frac{1}{\text{عہ}^4}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{\text{بہ}^4}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{\text{جہ}^4}\right)^{-1}\ldots\ldots}$$

یا

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\text{عہ}^2}+\frac{1}{\text{عہ}^4}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\text{بہ}^2}+\frac{1}{\text{بہ}^4}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\text{جہ}^2}+\frac{1}{\text{جہ}^4}+\ldots\right)\ldots}{\left(1+\frac{1}{\text{عہ}^4}+\frac{1}{\text{عہ}^8}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\text{بہ}^4}+\frac{1}{\text{بہ}^8}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{\text{جہ}^4}+\frac{1}{\text{جہ}^8}+\ldots\right)\ldots}$$

اور یہ $= \dfrac{1 + \frac{1}{۲^۲} + \frac{1}{۳^۲} + \frac{1}{۴^۲} + \cdots\cdots}{1 + \frac{1}{۲^۴} + \frac{1}{۳^۴} + \frac{1}{۴^۴} + \cdots\cdots}$

یا $= \dfrac{\frac{1}{۶}\pi^۲}{\frac{1}{۹۰}\pi^۴} = \dfrac{۱۵}{\pi^۲}$

(۴) ایک لامتناہی خط مستقیم کو نقطوں کی ایک لامتناہی تعداد سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنمیں سے ہر ایک کا طول ا ہے۔ اگر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اسکا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور کسی ایک نقطہ تقسیم سے اس کے فاصلہ کا ظل خط مستقیم پر لا ہو تو ثابت کرو کہ تمام نقاط تقسیم سے اِس نقطہ کے فاصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{\pi}{\text{ا ما}} \cdot \frac{\text{جبز}\,\frac{۲\pi\,\text{ما}}{\text{ا}}}{\text{جمز}\,\frac{۲\pi\,\text{ما}}{\text{ا}} - \text{جم}\,\frac{۲\pi\,\text{لا}}{\text{ا}}}$$

(369)

جس سلسلہ کو جمع کرنا ہے وہ $\sum_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\text{ما}^۲ + (\text{لا} + \text{ن ا})^۲}$ ہے جو

$$\frac{1}{۲\,\text{خ ما}} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\text{لا} - \text{خ ما} + \text{ن ا}} - \frac{1}{\text{لا} + \text{خ ما} + \text{ن ا}} \right)$$

کے مماثل ہے ۔ اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{\pi}{۲\,\text{خ ما ا}} \left\{ \text{مم}\,\frac{\pi(\text{لا} - \text{خ ما})}{\text{ا}} - \text{مم}\,\frac{\pi(\text{لا} + \text{خ ما})}{\text{ا}} \right\}$$

یا $\dfrac{\pi}{۲\,\text{خ ما ا}} \cdot \dfrac{\text{جب}\,\frac{۲\pi\,\text{خ ما}}{\text{ا}}}{\text{جب}\,\frac{\pi(\text{لا} + \text{خ ما})}{\text{ا}}\ \text{جب}\,\frac{\pi(\text{لا} - \text{خ ما})}{\text{ا}}}$

اور یہ مطلوبہ نتیجہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔

سترہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\tfrac{۱}{۲}\pi\ \text{جب ط}\right) = \tfrac{۱}{۴}\pi\ \text{جم}^{۲}\text{ط}\left(۱ + \frac{\text{جم}^{۲}\text{ط}}{۴\times۲}\right)\left(۱ + \frac{\text{جم}^{۲}\text{ط}}{۶\times۴}\right)\cdots$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$۱ + \text{جب لا} = \tfrac{۱}{۸}(\pi + ۲\,\text{لا})^{۲}\left\{۱ - \frac{(\pi + ۲\,\text{لا})^{۲}}{۴^{۲}\pi^{۲}}\right\}^{۲}\left\{۱ - \frac{(\pi + ۲\,\text{لا})^{۲}}{۸^{۲}\pi^{۲}}\right\}^{۲}\cdots$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{(\text{لا}+\text{م})(\text{لا}+\text{ن})} = -\pi^{۲}$$

جہاں م، ن تمام صحیح عددی قیمتیں اختیار کرتے ہیں اور لا صحیح عدد نہیں ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{و}^{۲}+۱}{\text{و}^{۲}-۱} = \frac{\left(\frac{\pi^{۲}}{۴}+۱\right)\left(\frac{\pi^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۹}\right)\left(\frac{\pi^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۲۵}\right)\cdots}{\left(\frac{\pi^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{\pi^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۱۶}\right)\left(\frac{\pi^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۳۶}\right)\cdots}$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{۲\,\text{لا}^{۲}}{۱+\text{لا}^{۲}} + \frac{۲\,\text{لا}^{۲}}{۲^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۲\,\text{لا}^{۲}}{۳^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \cdots = \frac{(۱+۴\,\text{لا}^{۲})\left(۱+\frac{۴\,\text{لا}^{۲}}{۳^{۲}}\right)\left(۱+\frac{۴\,\text{لا}^{۲}}{۵^{۲}}\right)\cdots}{(۱+\text{لا}^{۲})\left(۱+\frac{\text{لا}^{۲}}{۲^{۲}}\right)\left(۱+\frac{\text{لا}^{۲}}{۳^{۲}}\right)\cdots}$$

۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{3^2}+\frac{3}{5^2}+\frac{6}{7^2}+\frac{10}{9^2}+\dots=\frac{\pi^2}{64}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$$

۷ — اگر

$$\text{ل}(\text{لا})=\text{لا}\prod_{1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}\,\text{ا}}\right)^2\right\},\qquad \text{م}(\text{لا})=\prod_{1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{2}{2\text{ن}-1}\times\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^2\right\}$$

تو ل (لا + $\frac{1}{2}$ ا) کو م (لا) کی رقوم میں اور م (لا + $\frac{1}{2}$ ا) کو ل (لا) کی رقوم میں بیان کرو، اور پھر $\frac{1\times3\times5\cdots(2\text{م}-1)}{2^{\text{م}}\,|\underline{\text{م}}}\sqrt{2\text{م}+1}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ م لامتناہی ہو۔

(370)

۸ — اگر ض$_{\text{ر}}$ سے وہ حاصل ضرب تعبیر ہوں جو $\frac{1}{1^2}$، $\frac{1}{2^2}$، $\frac{1}{3^2}$، ... میں سے ر، ر رقموں کو لیکر ضرب دینے سے بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$2^{2\text{ن}}\text{ض}_{\text{ن}}=\frac{\pi^{2\text{ن}}}{|\underline{2\text{ن}}}+\frac{\pi^{2\text{ن}-2}}{|\underline{2\text{ن}-2}}\text{ض}_1+\frac{\pi^{2\text{ن}-4}}{|\underline{2\text{ن}-4}}\text{ض}_2+\dots+\frac{\pi^2}{|\underline{2}}\text{ض}_{\text{ن}-1}+\text{ض}_{\text{ن}}$$

۹ — ثابت کرو کہ

$$1-\frac{1^2}{2^2}-\frac{1^2\times3^2}{2^2\times4^2}-\frac{1^2\times3^2\times5^2}{2^2\times4^2\times6^2}-\dots=\frac{2}{\pi}$$

۱۰ — جمع کرو سلسلہ

$$\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\dots\dots$$

۱۱ — ثابت کرو کہ مثبت صحیح عددوں کے ہر جوڑے کے متکافیوں کی چوتھی قوتوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۳۸۴\,\pi^{۸}}{|\underline{۵}\;|\underline{۹}}$ ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ

$$\left(۱ + \frac{۲}{۱^۲+۱} + \frac{۲}{۲^۲+۱} + \frac{۲}{۳^۲+۱} + \cdots\right)\left(\frac{۱}{۴+۱^۲} + \frac{۱}{۴+۳^۲} + \frac{۱}{۴+۵^۲} + \cdots\right) = \frac{\pi^۲}{۸}$$

۱۳ — ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{۱}{۱\times۲\times۳}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۲\times۳\times۴}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۳\times۴\times۵}\right)^۲ + \cdots$$

کا مجموعہ $\frac{۱}{۴}\pi^۲ - \frac{۳۹}{۱۶}$ ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{ر=\infty}\ \frac{(م^۲-۱)(۲^۲م^۲-۱)\cdots(ر^۲م^۲-۱)}{\{م^۲-(م-۱)^۲\}\{۲^۲م^۲-(م-۱)^۲\}\cdots\{ر^۲م^۲-(م-۱)^۲\}} = (م-۱)$$

۱۵ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱^۲+لا^۲} - \frac{۳}{۳^۲+لا^۲} + \frac{۵}{۵^۲+لا^۲} - \cdots\cdots$$

کا مجموعہ $\frac{۱}{۴}\pi$ قطز $\frac{۱}{۲}\pi$ لا ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ

$$مس^{-۱} لا - مس^{-۱}\frac{۱}{۳} لا + مس^{-۱}\frac{۱}{۵} لا - \cdots = مس^{-۱} مسئر \frac{۱}{۴}\pi لا$$

۱۷ — ثابت کرو کہ

$$لوگ ۱۲ - ۲ لوگ \pi = \frac{ص_۲}{۲} + \frac{۱}{۲}\frac{ص_۴}{۴} + \frac{۱}{۳}\frac{ص_۶}{۶} + \cdots + \frac{۱}{ن}\frac{ص_{۲ن}}{۲ن} + \cdots$$

جہاں م، ان سب عددوں کی رو یں قوتوں کے تکافیوں کا مجموعہ ہے جو مفرد نہیں ہیں۔

۱۸۔ ایک مربع ا ب ج د کے ضلع ب ج کو غیر معین طور پر خارج کر دیا گیا ہے اور اس پر حصے ج ج، ، ج، ج۲ ، ج۲ ج۳ ... ہر ایک ب ج کے مساوی قطع کئے گئے ہیں۔ اگر زاویے ب ا ج، ، ب ا ج۲ ، ب ا ج۳ ، .... علی الترتیب ط، ، ط۲ ، ط۳ ، .... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط}_1 \text{ جب ط}_2 \text{ جب ط}_3 \ldots \text{ تک } \infty = \sqrt{2\pi \text{ تمز } \pi}$$

۱۹۔ اگر تمام مفرد عدد ۲، ۳، ۵، .... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \ldots = \frac{6}{\pi^2}$$

$$\text{اور } \frac{2^2}{1+2^2} \times \frac{3^2}{1+3^2} \times \frac{5^2}{1+5^2} \ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^2}{15}$$ (371)

$$\frac{2^4}{1+2^4} \times \frac{3^4}{1+3^4} \times \frac{5^4}{1+5^4} \ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^4}{105}$$ (یولر)

۲۰۔ دوہرے طور پر لامتناہی سلسلہ

$$\sum_{\text{م}=1}^{\text{م}=\infty} \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\infty} (-1)^{\text{م}+\text{ن}} \frac{\text{جم م لا جم ن ما}}{\text{م ن} (\text{م}^2 + \text{ن}^2)}$$

کو ما کے ضعفوں کی جیوب التمام کے اکہرے طور پر لامتناہی سلسلہ کی شکل میں بیان کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ

$$\pi \left\{ \frac{(\text{ن} \pi + \text{عہ})^4 + \text{یہ}^4}{\text{ن}^4 \pi^4} \right\}$$

$= (\text{جمز}^2 \text{به} \sqrt{2} + \text{جم}^2 \text{به} \sqrt{2} - 2\ \text{جم}\ 2\ \text{عہ جم به} \sqrt{2}\ \text{جمز به} \sqrt{2} + \text{جم}^2\ 2\ \text{عہ}) \backslash 4 (\text{عہ}^4 + \text{بہ}^4)$

جہاں ن، تمام صحیح عددی قیمتیں مثبت اور منفی اختیار کرتا ہے بجز صفر کے۔

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{4\times3\times2\times1} + \frac{1}{8\times7\times6\times5} + \frac{1}{12\times11\times10\times9} + \dots\dots$$

$$= \frac{1}{4}\ \text{لوک}\ 2 - \frac{1}{24}\pi ،$$

$$\frac{1}{7\times5\times3\times1} + \frac{1}{15\times13\times11\times9} + \frac{1}{23\times21\times19\times17} + \dots\dots$$

$$= \frac{\pi}{96(2+\sqrt{2})}$$

۲۳ — اگر $\text{فہ}(\text{خ} \text{لا}) = \left(1 + \frac{\text{خ لا}}{\text{ا}}\right)\left(1 + \frac{\text{خ لا}}{\text{ب}}\right)\left(1 + \frac{\text{خ لا}}{\text{ج}}\right)\dots = \text{ا} + \text{خ ب}$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ج}} + \dots = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{1^2} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{2^2} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{3^2} + \dots$$

$$= \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{مس}\frac{\pi\,\text{لا}}{\sqrt{2}} - \text{مسز}\frac{\pi\,\text{لا}}{\sqrt{2}}}{\text{مس}\frac{\pi\,\text{لا}}{\sqrt{2}} + \text{مسز}\frac{\pi\,\text{لا}}{\sqrt{2}}}\right)$$

۲۴ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^2 + لا^2} = \frac{\pi}{2\,لا} \times \frac{جبز\, 2\pi\, لا + جب\, 2\pi\, لا}{جمز\, 2\pi\, لا - جم\, 2\pi\, لا} - \frac{1}{2\,لا^2}$$

۲۵ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{ن=-\infty}^{ن=\infty} \frac{1}{(ن\pi + طہ)^2} = قم^2\, طہ$$

۲۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{و^{ب+لا} + و^{ج-لا}}{و^{ب} + و^{ج}}$$

$$= \left\{1 + \frac{4(ب-ج)لا + 4لا^2}{\pi^2 + (ب-ج)^2}\right\}\left\{1 + \frac{4(ب-ج)لا + 4لا^2}{9\pi^2 + (ب-ج)^2}\right\}\left\{1 + \frac{4(ب-ج)لا + 4لا^2}{25\pi^2 + (ب-ج)^2}\right\}$$

اور

$$\frac{و^{ب+لا} - و^{ج-لا}}{و^{ب} - و^{ج}} = \left(1 + \frac{2\,لا}{ب-ج}\right)\left\{1 + \frac{4(ب-ج)لا + 4لا^2}{4\pi^2 + (ب-ج)^2}\right\}$$

$$\left\{1 + \frac{4(ب-ج)لا + 4لا^2}{16\pi^2 + (ب-ج)^2}\right\} \ldots\ldots$$ (یولر)

(372)

۲۷ — اگر

$$ف = \frac{1}{ن-م} - \frac{1}{ن+م} + \frac{1}{3ن-م} - \frac{1}{3ن+م} + \frac{1}{5ن-م} - \frac{1}{5ن+م} + \ldots$$

$$ق = \frac{1}{(ن-م)^2} + \frac{1}{(ن+م)^2} + \frac{1}{(3ن-م)^2} + \frac{1}{(3ن+م)^2} + \frac{1}{(5ن-م)^2} + \ldots\ldots$$

$$ر = \frac{1}{(ن-م)^3} - \frac{1}{(ن+م)^3} + \frac{1}{(3ن-م)^3} - \frac{1}{(3ن+م)^3} + \ldots$$

$$\text{س} = \frac{1}{(\text{ن}-\text{م})^4} + \frac{1}{(\text{ن}+\text{م})^4} + \frac{1}{(3\text{ن}-\text{م})^4} + \frac{1}{(3\text{ن}+\text{م})^4} + \cdots$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف} = \frac{\text{ک}\,\pi}{2\text{ن}},\quad \text{ق} = \frac{(2\text{ک}^2+2)\pi^2}{2\times 4\times \text{ن}^2},\quad \text{ر} = \frac{(6\text{ک}^2+6\text{ک})\pi^3}{2\times 4\times 6\times \text{ن}^3},$$

$$\text{س} = \frac{(24\text{ک}^4+32\text{ک}^3+8)\pi^4}{2\times 4\times 6\times 8\times \text{ن}^4}$$

جہاں $\text{ک} = \text{مس}\,\frac{\text{م}\,\pi}{2\text{ن}}$ (یولر)

۲۸ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \cdots\cdots$$

کا مجموعہ جسمیں وہ سب طاق عدد جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں لئے گئے ہیں $\pi^3 / 18\sqrt{3}$ ہے۔ (یولر)

۲۹ — ثابت کرو کہ اُن سب عددوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{2\pi^2}{27}$ ہے جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

۳۰ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جیب ا} + \text{جیب ج}}{\text{جیب ج}} = \left(1+\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)\left(1-\frac{2\text{ج ا}-\text{ا}^2}{\pi^2+\text{ج}^2}\right)\left(1+\frac{2\text{ج ا}+\text{ا}^2}{4\pi^2+\text{ج}^2}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{2\text{ج ا}-\text{ا}^2}{9\pi^2+\text{ج}^2}\right)\cdots\cdots$$

اور

$$\frac{\text{جم ا} - \text{جم ج}}{1-\text{جم ج}} = \left(1-\frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2}\right)\left(1-\frac{2\text{ج ا}-\text{ا}^2}{4\pi^2+\text{ج}^2}\right)\left(1+\frac{2\text{ج ا}+\text{ا}^2}{4\pi^2+\text{ج}^2}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{۲ ج ما - ما^2}{۱۶\pi^2+ج^2}\right)\text{........ (یولر)}$$

۳۱۔ ثابت کرو کہ جب، ن طاق ہو تو

$$مم^2\frac{۲\pi}{۲ن}+مم^2\frac{۴\pi}{۲ن}+\cdots+مم^2\frac{(ن-۱)\pi}{۲ن}=\frac{۱}{۶}(ن-۱)(ن-۲)$$

$$مم^4\frac{۲\pi}{۲ن}+مم^4\frac{۴\pi}{۲ن}+\cdots+مم^4\frac{(ن-۱)\pi}{۲ن}=\frac{۱}{۹۰}(ن-۱)(ن-۲)$$
$$\times(ن^2+۳ن-۱۳)$$

۳۲۔ ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(۱+لا^{۲ن}\right)\left(۱+\frac{لا^{۲ن}}{۳^{۲ن}}\right)\left(۱+\frac{لا^{۲ن}}{۵^{۲ن}}\right)\cdots\cdots$$

$$=\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}ن}}\prod_{۱}^{\frac{۱}{۲}ن}\left(جمز\,\pi\,عر\,لا+جم\,\pi\,بر\,لا\right)\text{، اگر ن جفت ہے}$$

$$\text{اور}\quad=\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)}}\,جمز\,\frac{۱}{۲}\pi\,لا\prod_{۱}^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)}\left(جمز\,\pi\,عر\,لا+جم\,\pi\,بر\,لا\right)\text{اگر ن طاق ہے}$$

جہاں عر، بر علی الترتیب جب $\frac{ر\pi}{۲ن}$، جم $\frac{ر\pi}{۲ن}$ کو تعبیر کرتے ہیں اور ر ایک طاق عدد ہے۔ (گلیشیر[1])

(873)

۳۳۔ ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$لا^{ن}\left(۱+لا^{۲ن}\right)\left(۱+\frac{لا^{۲ن}}{۲^{۲ن}}\right)\left(۱+\frac{لا^{۲ن}}{۳^{۲ن}}\right)\cdots\cdots$$

$$=\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}ن}\pi^{ن}}\prod_{۱}^{\frac{۱}{۲}ن}\left(جمز\,۲\pi\,عر\,لا-جم\,۲\pi\,بر\,لا\right)$$

[1] Glaisher

اگر ن جفت ہے اور

$$= \frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\,\pi^{\text{ن}}}\ \text{جنز}\,\pi\,\text{لا}\,\prod_{۱}^{\text{ن}-۱}\left(\text{جمز}\,۲\pi\,\text{عہ}\,\text{لا}-\text{جم}\,۲\pi\,\text{بہ}\,\text{لا}\right)$$

اگر ن طاق ہے۔ عہ اور بہ کا وہی مفہوم لیا جائے جو سوال ماسبق میں تھا۔ (گلیشیر)

۳۴ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}+\text{لا}^{۲\text{ن}}}+\frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}+\text{لا}^{۲\text{ن}}}+\frac{۱}{۳^{۲\text{ن}}+\text{لا}^{۲\text{ن}}}+\cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi}{\text{ن}\,\text{لا}^{۲\text{ن}-۱}}\sum_{۱}^{\text{ن}-۱}\frac{\text{عہ}\,\text{جنز}\,۲\pi\,\text{عہ}\,\text{لا}+\text{بہ}\,\text{جب}\,۲\pi\,\text{بہ}\,\text{لا}}{\text{جمز}\,۲\pi\,\text{عہ}\,\text{لا}-\text{جم}\,۲\pi\,\text{بہ}\,\text{لا}}-\frac{۱}{۲\,\text{لا}^{۲\text{ن}}}$$

جہاں عہ اور بہ کے وہی معنے ہیں جو پچھلے سوال میں تھے۔ (گلیشیر)

۳۵ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}}{\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}}+\sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\infty}\left\{\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ر}(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲})}{(\text{لا}+\text{ر}\,\text{ا})^{۲}+(\text{ما}+\text{ر}\,\text{ب})^{۲}}+\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}-\text{ر}(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲})}{(\text{لا}-\text{ر}\,\text{ا})^{۲}+(\text{ما}-\text{ر}\,\text{ب})^{۲}}\right\}$$

$$= \pi\,\text{جب}\left(۲\pi\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\right)\Big/\left\{\text{جمز}\left(۲\pi\frac{\text{ا}\,\text{ما}-\text{ب}\,\text{لا}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\right)-\text{جم}\left(۲\pi\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\right)\right\}$$

(374)

اٹھارواں باب

مسلسل کسریں

π کے غیر منطق ہونیکا ثبوت

۳۰۲ — فرض کرو کہ مستدق سلسلہ

$$1 - \frac{\text{لا}^2}{1\times\text{ج}} + \frac{\text{لا}^4}{1\times2\times\text{ج}(\text{ج}+1)} - \frac{\text{لا}^6}{1\times2\times3\times\text{ج}(\text{ج}+1)(\text{ج}+2)} + \cdots$$

ف (ج) سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$\text{ف}(\text{ج}+1) - \text{ف}(\text{ج}) = \frac{\text{لا}^2}{\text{ج}(\text{ج}+1)}\,\text{ف}(\text{ج}+2)$$

اس لئے

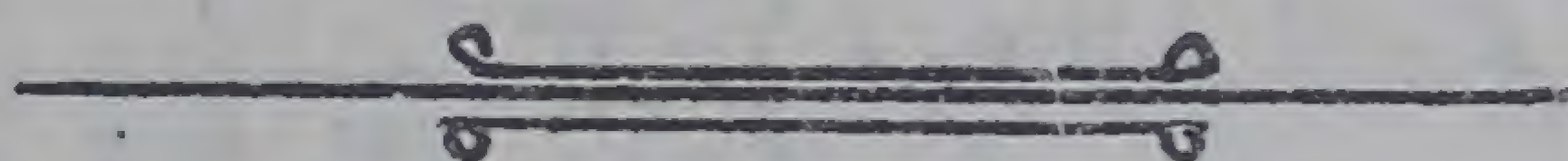
$$\frac{\text{ف}(\text{ج})}{\text{ف}(\text{ج}+1)} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ج}(\text{ج}+1)}\cdot\frac{\text{ف}(\text{ج}+2)}{\text{ف}(\text{ج}+1)}$$

پس ف (ج + ۱) \ ف (ج) کو دوسری جماعت کی مسلسل کسر

$$\frac{1}{1-}\;\frac{\text{لا}^2\backslash\text{ج}(\text{ج}+1)}{1-}\;\frac{\text{لا}^2\backslash(\text{ج}+1)(\text{ج}+2)}{1-}\;\frac{\text{لا}^2\backslash(\text{ج}+2)(\text{ج}+3)}{1-}\cdots$$

کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج = $\frac{1}{2}$ اور لا کی بجائے $\frac{1}{2}$ لا لکھو تو سلسلہ ف (ج) ہو جاتا ہے

$$1 - \frac{\text{لا}^2}{2\times 1} + \frac{\text{لا}^4}{4\times 3\times 2\times 1} - \dots\dots\dots$$

یا $= \text{جم لا}$

اور ف (ج+۱)، $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ ہو جاتا ہے۔ پس

$$\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}} = \frac{1}{1-}\,\frac{\text{لا}^2}{3-}\,\frac{\text{لا}^2}{5-}\,\frac{\text{لا}^2}{7-}\dots\dots\dots$$

جو مس لا کے لئے دوسری جماعت کی ایک مسلسل کسر ہے۔

۳۷۴ — لیمبرٹ کا وہ ثبوت[۱] جو π کے غیر منطق ہونے کے متعلق ہے محصلہ بالا مسلسل کسر پر منحصر ہے۔ رکھو لا $= \frac{1}{4}\pi$ اور بغرض امکان رکھو $\frac{1}{4}\pi = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ جہاں م اور ن صحیح عدد ہیں۔

تب $$1 = \frac{\text{م}}{\text{ن}-}\,\frac{\text{م}^2}{3\text{ن}-}\,\frac{\text{م}^2}{5\text{ن}-}\dots\dots\dots$$

(375) اب چونکہ کسی خاص رقم کے بعد کسروں $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$، $\frac{\text{م}^2}{3\text{ن}}$، $\frac{\text{م}^2}{5\text{ن}}$، ...... کے نسب نما شمار کنندوں کی بہ نسبت ایک ایسے عدد سے بڑے ہیں جو ایک سے بڑا ہے اس لئے ایک مشہور مسئلہ[۲] کی رو سے مساوات کی بائیں جانب کی مسلسل کسر ایک غیر منطق اظہار رکھتی ہے اور اسلئے ایک کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ پس $\frac{1}{4}\pi$ کسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ م اور ن صحیح عدد ہوں اور اسلئے π غیر منطق ہے۔ بلاشبہ یہ نتیجہ دفعہ (۲۵۱ ا) کے وسیع تر

۱؎ سنہ ۱۷۶۱ء میں برلن اکاڈیمی کی یادداشت میں شائع ہوا۔

۲؎ دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ (۴۸۴)۔

مسئلہ میں شامل ہے جو یہ ہے کہ π ایک علوی عدد ہے۔

دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استحالہ

۳۰۴ — کسر $\text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}+1، \text{جہ}+1، \text{لا}) \backslash \text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}، \text{جہ}، \text{لا})$

کو جسمیں $\text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}، \text{جہ}، \text{لا})$ علوی ہندسی سلسلہ

$$1 + \frac{\text{عہ}\times\text{بہ}}{1\times\text{جہ}}\text{لا} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+1)\times\text{بہ}(\text{بہ}+1)}{1\times 2\times\text{جہ}(\text{جہ}+1)}\text{لا}^2 + \cdots$$

کو تعبیر کرتا ہے مسلسل کسر

$$\frac{1}{1-}\;\frac{\text{ک}_1\text{لا}}{1-}\;\frac{\text{ک}_2\text{لا}}{1-}\;\frac{\text{ک}_3\text{لا}}{1-}\cdots\cdots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں

$$\text{ک}_1 = \frac{\text{عہ}(\text{جہ}-\text{بہ})}{\text{جہ}(\text{جہ}+1)}،\quad \text{ک}_2 = \frac{(\text{بہ}+1)(\text{جہ}+1-\text{عہ})}{(\text{جہ}+1)(\text{جہ}+2)}،$$

$$\text{ک}_3 = \frac{(\text{عہ}+1)(\text{جہ}+1-\text{بہ})}{(\text{جہ}+2)(\text{جہ}+3)}،$$

$$\text{ک}_4 = \frac{(\text{بہ}+2)(\text{جہ}+2-\text{عہ})}{(\text{جہ}+3)(\text{جہ}+4)}، \ldots\ldots،$$

$$\text{ک}_{2\text{ن}-1} = \frac{(\text{عہ}+\text{ن}-1)(\text{جہ}+\text{ن}-1-\text{بہ})}{(\text{جہ}+2\text{ن}-2)(\text{جہ}+2\text{ن}-1)}،$$

$$\text{ک}_{2\text{ن}} = \frac{(\text{بہ}+\text{ن})(\text{جہ}+\text{ن}-\text{عہ})}{(\text{جہ}+2\text{ن}-1)(\text{جہ}+2\text{ن})}$$

اس استحالہ کا فائدہ تمثیل ذیل سے ظاہر ہوگا۔ سلسلہ

$$\text{فہ} = \text{جب فہ جم فہ}\left\{ 1 + \frac{2}{3}\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\,\text{جب}^4\,\text{فہ} + \ldots \right\}$$

ل اور ضابطہ بالا میں رکھو ع = ۱، ب = ۰، ح = $\frac{1}{2}$، لا = جب^2 فہ تو

$$\text{فہ} = \frac{\text{جب فہ جم فہ}}{1-}\;\frac{\frac{2\times 1}{3\times 1}\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}{1-}\;\frac{\frac{2\times 1}{5\times 3}\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}{1-}\;\frac{\frac{4\times 3}{7\times 5}\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}{1-}\ldots$$

اس کے دوسرے ستدق سے فہ کیلئے اسنیلییس (Snellius)
کا یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ} = \frac{\text{جب فہ جم فہ}}{1 - \frac{2}{3}\,\text{جب}^2\,\text{فہ}} = \frac{3\,\text{جب}\,2\,\text{فہ}}{2\,(2 + \text{جم}\,2\,\text{فہ})}$$

یولر کا استحالہ

۵۰۴ — یولر کے مسئلہ[1]

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \text{ع}_4 + \ldots = \frac{\text{ع}_1}{1-}\;\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1 + \text{ع}_2 -}\;\frac{\text{ع}_1\text{ع}_3}{\text{ع}_2 + \text{ع}_3 -}\;\frac{\text{ع}_2\text{ع}_4}{\text{ع}_3 + \text{ع}_4 -}\ldots$$

کے ذریعہ جسکو اس شکل

$$\frac{1}{\text{ا}_1} \pm \frac{1}{\text{ا}_2} \pm \frac{1}{\text{ا}_3} \pm \frac{1}{\text{ا}_4} \pm \ldots = \frac{1}{\text{ا}_1 \mp}\;\frac{\text{ا}_1^2}{\text{ا}_2 \pm \text{ا}_1 \mp}\;\frac{\text{ا}_2^2}{\text{ا}_3 \pm \text{ا}_2 \mp}\ldots$$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے دیگر سلسلے مستحیل ہو سکتے ہیں۔

---

[1] دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۴۸۷۔

اِس طریقہ کی مثال یہ ہے کہ مسئلہ

$$\frac{\pi}{ن} مم \frac{م\pi}{ن} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ن-م} + \frac{۱}{ن+م} - \frac{۱}{۲ن-م} + \frac{۱}{۲ن+م} - \dots$$

سے مسئلہ

$$\frac{\pi}{ن} مم \frac{م\pi}{ن} = \frac{۱}{م+} \frac{م^۲}{ن-۲م+} \frac{(ن-م)^۲}{۲م+} \frac{(ن+م)^۲}{۲م+} \frac{(۲ن-م)^۲}{۲م+}$$

$$\frac{(۲ن+م)^۲}{ن-۲م+} \dots$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اٹھارویں باب پر مثالیں

امثلہ (۱) تا (۱۳) میں مندرجہ مسئلوں کی تحقیق کرو۔

۱— $\frac{مسنر لا}{لا} = \frac{۱}{۱+} \frac{لا^۲}{۳+} \frac{لا^۲}{۵+} \dots\dots\dots$

۲— $مس ن لا = \frac{ن مس لا}{۱-} \frac{(ن^۲-۱) مس^۲ لا}{۳-} \frac{(ن^۲-۴) مس^۲ لا}{۵-}$

$$\frac{(ن^۲-۹) مس^۲ لا}{۷-} \dots\dots\dots$$

جہاں $لا < \frac{۱}{۲}\pi$ اور ن پر کوئی قید نہیں ہے۔

۳— $مس ن لا = \frac{ن مس لا}{۱- مس^۲ لا-} \frac{(ن^۲-۴) مس^۲ لا}{۳- ۳ مس^۲ لا-}$

$$\frac{(ن^۲-۱۶) مس^۲ لا}{۵- ۵ مس^۲ لا-} \dots$$

$$۴ - \text{مس}\,ن\,لا = \frac{ن\,\text{مس}\,لا}{۱-}\;\frac{(ن^۲-۱)\,\text{مس}^۲\,لا}{۳-}\;\frac{(ن^۲-۹)\,\text{مس}^۲\,لا}{۵-}\cdots$$

$$۵ - \text{مس}^{-۱}\,لا = \frac{لا}{۱+}\;\frac{لا^۲}{۳+}\;\frac{۴\,لا^۲}{۵+}\cdots$$

$$۶ - \text{مس}^{-۱}\,لا = \frac{لا}{۱-لا^۲+}\;\frac{۴\,لا^۲}{۳-۳\,لا^۲+}\;\frac{۱۲\,لا^۲}{۵-۵\,لا^۲+}\cdots$$

$$۷ - \text{مس}^{-۱}\,لا = \frac{لا}{۱+}\;\frac{لا^۲}{۳-لا^۲+}\;\frac{۹\,لا^۲}{۵-۳\,لا^۲+}\cdots$$

$$۸ - \text{مس}\,ن\,لا = \frac{ن\,\text{مسز}\,لا}{۱-}\;\frac{(ن^۲+۱)\,\text{مسز}^۲\,لا}{۳-}\;\frac{(ن^۲+۴)\,\text{مسز}^۲\,لا}{۵-}\cdots$$

$$۹ - \frac{\pi}{ن}\,\text{قم}\,\frac{\pi}{ن} = ۱+\frac{۱}{ن-۱+}\;\frac{ن(ن-۱)}{۱+}\;\frac{ن(ن+۱)}{ن-۱+}\;\frac{۲ن(۲ن-۱)}{۱+}\cdots$$

$$۱۰ - \frac{\text{جب}\,\pi\,لا}{\pi\,لا} = ۱+\frac{لا}{۱-}\;\frac{۱+لا}{لا-}\;\frac{۱-لا}{۱+لا-}\;\frac{۲(۲+لا)}{لا-}\;\frac{۲(۲-لا)}{۱+لا-}\cdots$$

$$۱۱ - \text{جم}\,\frac{\pi\,لا}{۲} = ۱+\frac{لا}{۱-}\;\frac{۱+لا}{لا-}\;\frac{۱-لا}{۲+لا-}\;\frac{۳(۳+لا)}{لا-}\cdots$$

$$۱۲ - \text{مم}\,\frac{۱}{لا} = \frac{۱}{لا-۱+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۳لا-۲+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۵لا-۲+}\cdots$$

$$۱۳ - \frac{\text{جب}\,ط}{ط} = ۱-\frac{\frac{۱\times۲}{۱\times۳}\,\text{جب}^۲\,\frac{۱}{۲}ط}{۱-}\;\frac{\frac{۱\times۲}{۳\times۵}\,\text{جب}^۲\,\frac{۱}{۲}ط}{۱-}\;\frac{\frac{۳\times۴}{۵\times۷}\,\text{جب}^۲\,\frac{۱}{۲}ط}{۱-}\cdots$$

(÷)

(378)

متفرق مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

جم م لا ـ جم م عہ / جم لا ـ جم عہ = قم عہ { ۲ جب عہ جم (م ـ ۱) لا + ۲ جب ۲ عہ جم (م ـ ۲) لا + ... + ۲ جب (م ـ ۱) عہ جم لا + جب م عہ }

(ہرمائٹ)

جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں اور عہ = ک π / ن تو ثابت کرو کہ

جب م لا / جب ن لا = $\frac{1}{2}$ن Σ (-1) ک جب م عہ مم (لا ـ عہ) / ۲

اور نیز یہ کہ جملے

= $\frac{1}{2}$ن Σ (-1) ک جب م عہ مم (لا ـ عہ)

یا = $\frac{1}{2}$ن Σ (-1) ک جب م عہ قم (لا ـ عہ)

بموجب اسکے کہ م + ن جفت یا طاق ہو۔ (ہرمائٹ)

۳۔ ثابت کرو کہ

مم (لا ـ عہ) مم (لا ـ بہ) . . . . مم (لا ـ لہ)

= جم $\frac{1}{2}$ ن π + Σ ا مم (لا ـ عہ)

جہاں ا = مم (عہ ـ بہ) مم (عہ ـ جہ) . . . . مم (عہ ـ لہ)

(ہرمائٹ)

۴ — اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے زاویے ہوں اور لا، ما، ی وہ حقیقی مقداریں ہیں جو مساواتوں

$$\text{جمز}\,\text{لا}\,(\text{جب ب جب ج})^{\frac{1}{2}} = \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}\,،$$

$$\text{جمز}\,\text{ما}\,(\text{جب ج جب ا})^{\frac{1}{2}} = \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب}\,،$$

$$\text{جمز}\,\text{ی}\,(\text{جب ا جب ب})^{\frac{1}{2}} = \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}$$

سے حاصل ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی تین نقطے جو اس طور واقع ہوں کہ ان میں سے دو دو کے درمیان فاصلے علی الترتیب لا، ما، ی کے متناسب ہیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۵ — اگر لا $> \frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{1}{1+\text{لا}^2} > \frac{1}{1+\text{لا}+\text{لا}^2} \quad \text{اور} \quad < \frac{1}{1-\text{لا}+\text{لا}^2}$$

۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ف}=\text{م}} \sum_{\text{ک}=0}^{\text{ک}=\text{ن}-1} \frac{2\,\text{ف}\,\text{ک}\,\pi}{\text{ن}}$$

اس بڑے سے بڑے صحیح عدد کے مساوی ہے جو $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ میں ہے۔

(379)

۷ — ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{4\,\text{ب}^2}{(2\text{ا}+\text{ب})^2+3\text{ب}^2} + \text{مس}^{-1}\frac{4\,\text{ب}^2}{(2\text{ا}+3\text{ب})^2+3\text{ب}^2} + \ldots + \text{مس}^{-1}\frac{4\,\text{ب}^2}{[2\text{ا}+(2\text{ن}-1)\text{ب}]^2+3\text{ب}^2} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ن}\,\text{ب}^2}{\text{ا}^2+\text{ن}\,\text{ا}\,\text{ب}+\text{ب}^2}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

مم^-۱ (۱^۲ + ۳/۴) + مم^-۱ (۲^۲ + ۳/۴) + مم^-۱ (۳^۲ + ۳/۴) + ...

کا مجموعہ مم^-۱ ۱/۲ ہے۔

۸۔ اگر مس ا قط ب + مس ب قط ا = مس ج

تو ثابت کرو کہ مس ا قط ا + مس ب قط ب + مس ج قط ج + ۲ مس ا مس ب مس ج = ۰

اس نتیجہ اور معلومہ مسئلہ

جب ا جم ا + جب ب جم ب + جب ج جم ج - ۲ جب ا جب ب جب ج = ۰

کے درمیان جو تعلق ہے اسے معلوم کرو، جہاں ا، ب، ج ایک مثلث کے زاویے ہیں۔

۹۔ اگر م اور ن کوئی عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

جب لا { ۱ - ن(ن + ۱) / (م + ن)(م + ن + ۱) · لا^۲ / |۲

+ ن(ن + ۱)(ن + ۲)(ن + ۳) / (م + ن)(م + ن + ۱)(م + ن + ۲)(م + ن + ۳) · لا^۴ / |۴ - ... }

= (م + ن جم لا) ۱ / (م + ن) · لا / ۱ - { م (م + ۱) (م + ۲)

+ ن (ن + ۱) (ن + ۲) جم لا } ۱ / (م + ن)(م + ن + ۱)(م + ن + ۲) · لا^۳ / |۳ + ...

۱۰۔ ثابت کرو کہ

۱	جم عہ	جم (عہ + بہ)	جم (عہ + بہ + جہ)	جم (عہ + بہ + جہ + ضہ)
جم عہ	۱	جم بہ	جم (بہ + جہ)	جم (بہ + جہ + ضہ)
جم (عہ + بہ)	جم بہ	۱	جم جہ	جم (جہ + ضہ)
جم (عہ + بہ + جہ)	جم (بہ + جہ)	جم جہ	۱	جم ضہ
جم (عہ + بہ + جہ + ضہ)	جم (بہ + جہ + ضہ)	جم (جہ + ضہ)	جم ضہ	۱

= ۰

۱۱ــ ثابت کرو کہ مقطع

۱	جم ا	جب ا	جم (۳ا + لا)
۱	جم ب	جب ب	جم (۳ب + لا)
۱	جم ج	جب ج	جم (۳ج + لا)
۱	جم د	جب د	جم (۳د + لا)

= م [∑ جب (ا + س + لا)] { Π جب ½ (ا - ب) }

جہاں م کوئی عددی جزو ضربی ہے اور س = ½ (ا + ب + ج + د)

۱۲ــ اگر

جم (۲ لا - ما - ی) جب (ما - ی) + جم (۲ ما - ی - لا) جب (ی - لا)
+ جم (۲ ی - لا - ما) جب (لا - ما) = ۰

اور لا، ما، ی میں سے کوئی دو مساوی نہ ہوں یا کسی دو میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو

جم ۲ لا + جم ۲ ما + جم ۲ ی = ۰

۱۳ــ اگر صفر اور π کے درمیان طہ کی دو قیمتیں جہ اور ضہ ہوں جو مساوات (380)

جب ۲ طہ جم² (عہ + بہ) + جب ۲ عہ جم² (بہ + طہ) + جب ۲ بہ جم² (عہ + طہ) = ۰

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ عہ اور بہ اس مساوات

جب ۲ فہ جم^۲ (جہ + ضہ) + جب ۲ جہ جم^۲ (ضہ + فہ) + جب ۲ ضہ جم^۲ (جہ + فہ) = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

۱۴۔ اگر مس $\frac{طہ}{۳}$ کی تین محصلہ قیمتیں مس عہ، مس بہ، مس جہ ہوں جبکہ مس طہ دیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جم عہ جم بہ جم جہ جب (عہ + بہ + جہ) + جب عہ جب بہ جب جہ جم (عہ + بہ + جہ) = ۰،

(۲) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ)
= جب ۲ عہ جب ۲ بہ جب ۲ جہ

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\Sigma \text{ جب (بہ − جہ) جم } \frac{\text{جہ + عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ + بہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{۲ عہ + ۳ بہ + ۳ جہ}}{۲}}{\Sigma \text{ جب (بہ − جہ) جم } \frac{\text{جہ + عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ + بہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{۲ عہ + ۳ بہ + ۳ جہ}}{۲}} = \frac{\text{جب ۲ (عہ + بہ + جہ) + } \Sigma \text{ جب (۲ عہ + بہ + جہ)}}{\text{جم ۲ (عہ + بہ + جہ) + } \Sigma \text{ جم (۲ عہ + بہ + جہ)}}$$

جہاں عمل جمع Σ اس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو زاویوں عہ، بہ، جہ کے باہمی دائری تبادلہ سے بنتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر

$$\text{ہ} = ۱ + \frac{\text{۲ جم طہ}}{۱ +} \; \frac{\text{۲ جم } \frac{طہ}{۲}}{۱ +} \; \frac{\text{۲ جم } \frac{طہ}{۲^۲}}{۱ +} \cdots\cdots$$

تو ع کی بجائے ع کا ن واں مستدق لینے سے جو نقطہ واقع ہوتی ہے وہ ہے

$$\frac{2(\text{ع}^2-1)}{\text{ع}-\sqrt{4-\text{ع}^2}\;\text{مم}\;\frac{\text{جم}^{-1}\frac{1}{2}\text{ع}}{(-2)^{\text{ن}}}}$$

١٧ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{1}{\text{ن}^2-1}-\frac{1}{3\,\text{ن}^2-3}+\frac{1}{5\,\text{ن}^2-5}-\ldots\ldots\ \infty\ \text{تک}$$

کا مجموعہ ہے $\frac{\pi}{4}\left\{\text{قط}\,\frac{\pi}{2\text{ن}}-1\right\}$

١٨ — ثابت کرو کہ مساوات مس ی = ع ی کی خیالی اصلیں نہیں ہو سکتیں تاآنکہ ع > ١ جہاں ع حقیقی ہے، اور اگر ع < ١ تو اسکی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

١٩ — ثابت کرو کہ کسی تین خطوط مستقیم ا و، ب و، ج و کے ضد توازی (Anti parallels.) ا، ب، ج میں سے گذرنیوالے اور مثلث ا ب ج کے زاویوں ا، ب، ج کے لحاظ سے، ایک نقطہ و پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ اگر و اور وَ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے چھ نقاط پائیں ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

اگر مرکز ہندسی ث سے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر عمود ث ل، ث م، ث ن ہوں اور دائرہ ل م ن کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$(4\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2)\,\text{اف}^2+(\text{ا}^2+4\text{ب}^2+\text{ج}^2)\,\text{ب ف}^2+(\text{ا}^2+\text{ب}^2+4\text{ج}^2)\,\text{ج ف}^2$$

مستقل ہے۔

(381) ۲۰ — اگر لا حقیقی ہو اور ۱ > لا > ۰ اور اگر مس^-۱ ی سے مراد وہ کم سے کم مثبت زاویہ ہو جسکا مماس ی ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum_{ر=۰}^{\infty} (-۱)^ر مس^{-۱} \frac{(۲ر+۱) لا}{(۲ر+۱)^۲ - لا^۲} = مس^{-۱} \left\{ جیبز \frac{\pi}{۳} لا قط \frac{\pi لا \sqrt{۳}}{۲} \right\}$$

۲۱ — اگر مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں میں سے گزرنیوالے دائرہ پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{اف^۲}{ب ج}(۱ + جم ا - جم ب - جم ج) + \frac{ب ف^۲}{ج ا}(۱ - جم ا + جم ب - جم ج)$$

$$+ \frac{ج ف^۲}{ا ب}(۱ - جم ا - جم ب + جم ج) = ۱ + جم ا + جم ب + جم ج$$

۲۲ — اگر ع_ن = ا جم ن ط + ب جب ن ط جہاں ا اور ب ن پر منحصر نہیں ہیں تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$ع_{ن+۱} - ۲ ع_ن جم ط + ع_{ن-۱} = ۰$$

ثابت کرو کہ

$$\frac{۲ جب^۶ ط + جب ۷ ط}{۲ جم^۶ ط - جم ۷ ط} = مس ط مس^۲ (ط + \frac{\pi}{۹}) مس^۲ (ط - \frac{\pi}{۹})$$

۲۳ — اگر مثلث کی مبہم صورت میں جبکہ ا، ب، ا دئے گئے ہوں بیرونی دائرے کے مرکز، مرکز ہندسی، نو نقطی دائرہ کے مرکز، اور مرکز عمودی کے دو دو محل علی الترتیب و_۱، و_۲، ث_۱، ث_۲، ن_۱، ن_۲، ع_۱، ع_۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

قط ا ع ع = ن ن = ۴ ت قم ا ث ث = ۳ و و ۲

۲۴ — ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج میں سے خطوطِ مستقیم اَ بَ جَ، ب جَ اَ، ج اَ بَ کھینچے گئے ہیں جو ا ب، ب ج، ج ا سے ترتیب وار مساوی زاویے ط بناتے ہیں اور نیز خطوطِ مستقیم اً جً بً، جً بً اً، اً بً جً کھینچے گئے ہیں جو ا ج، ج ب، ب ا کے ساتھ ترتیب وار مساوی زاویے ط بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ، اً بً جً ہر طرح ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ہر ایک کا رقبہ = ۵ جب² ط (مم ط — مم ا — مم ب — مم ج)² نیز ثابت کرو کہ اگر نقطہ ا سے اِن مثلثوں کے بیرونی (حائط) دائروں کے مماس م، م ہوں اور اسی طرح نقطوں ب اور ج سے مماس م، م، م، م تو

ا م = ج م، ب م = ا م، ج م = ب م

۲۵ — جمع کرو کہ سلسلہ

$$\sum_{ن=-ق}^{ن=ف}\left[\frac{1}{ن - ا - لا^{ن}(-1)} + \frac{1}{ن}\right]$$

جہاں قیمت ن = ۰ ترک کر دی گئی ہے اور ف، ق مثبت صحیح عدد ہیں جو لا انتہا بڑھتے ہیں۔

۲۶ — اگر ع = ۲π / ۱۷، تو ثابت کرو کہ مقداریں

جم ع + جم ۳² ع + جم ۳⁴ ع + جم ۳⁶ ع، اور جم ۳ ع + جم ۳³ ع + جم ۳⁵ ع + جم ۳⁷ ع

مساوات ی^۲ + $\frac{۱}{۲}$ ی = ا کی اصلیں ہیں، اور بتاؤ کہ جم عہ کی قیمت حاصل کرنیکے لئے یہ عمل جو اوپر بتایا گیا ہے کس طرح جاری کیا جا سکتا ہے۔

سترہ ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے نو متصلہ راس اَ ب ج، د، ع، ف، گ، ھ، ک ہیں اور یہ کثیر ضلعی ایک دائرہ میں جسکا مرکز و ہے بنایا گیا ہے۔ وتروں ب ع، ج گ، د ف، گ ھ کے نقاط وسطی کے ظل و ا پر علی الترتیب عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔ ثابت کرو کہ عہ بہ اور جہ ضہ کو قطر مانکر دو دائرے کھینچے جائیں تو ان کا مشترک وتر و میں سے گذرتا ہے اور اسکا طول $\frac{۱}{۲}$ و اَ ہے۔ (382)

۲۷ — اگر مثلث اَ ب ج کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں سے نو نقطی دائرہ کا مرکز فاصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{\text{بہ + جہ + ضہ - ۱۱ عہ}} + \frac{۱}{\text{جہ + ضہ + عہ - ۱۱ بہ}} + \frac{۱}{\text{ضہ + عہ + بہ - ۱۱ جہ}}$$

$$+ \frac{۱}{\text{عہ + بہ + جہ - ۱۱ ضہ}} = ۰$$

اور یہ کہ عہ^۲ + بہ^۲ + جہ^۲ + ضہ^۲ = ر^۲ (۱۳ - ۸ جم اَ جم ب جم ج)

جہاں ر بیرونی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ مس $\frac{۳\pi}{۱۱}$ + ۴ جب $\frac{۲\pi}{۱۱}$ = $\sqrt{۱۱}$

۲۹ — اگر مثلث اَ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز ع اور جانبی دائروں کے مرکز ل، م، ن، ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات ع م ن، ع ن ل، ع ل م کے اندرونی دائرے دائرہ اَ ب ج کو مس کرتے ہیں اور ان تین نقاط تماس سے جو مثلث بنتا ہے

اس کے زاویوں کے مماس علی الترتیب

$$\frac{۲\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\,ا + \text{جم}\,\frac{۱}{۲}\,ب + \text{جم}\,\frac{۱}{۲}\,ج - \text{جیب}\,\frac{۱}{۲}\,ب - \text{جیب}\,\frac{۱}{۲}\,ج - ۲}{۱ - \text{جم}\,\frac{۱}{۲}\,ب - \text{جم}\,\frac{۱}{۲}\,ج + \text{جیب}\,\frac{۱}{۲}\,ب + \text{جیب}\,\frac{۱}{۲}\,ج}$$

اور دو متشابہ جملوں کے مساوی ہیں۔

۳۰ — اگر لا ایک صحیح عدد نہ ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\sum \frac{۲\,\text{لا} + \text{م} + \text{ن}}{(\text{لا} + \text{م})^{۲}\,(\text{لا} + \text{ن})^{۲}}$$

جس میں م اور ن کو ہر ممکن طریقہ سے غیر مساوی قیمتیں (جو ع اور ـ ع کے درمیان صفر یا صحیح عدد ہوں) دی گئی ہیں معدوم ہوتا ہے جبکہ ع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

۳۱ — ثابت کرو کہ جیب$^{\text{م}}$ ط جم$^{\text{ن}}$ ط کو اس شکل

$$ا\,\frac{\text{جب}}{\text{جم}}\,(\text{م}+\text{ن})\,\text{ط} + ا_{۱}\,\frac{\text{جب}}{\text{جم}}\,(\text{م}+\text{ن}-۲)\,\text{ط} + ا_{۲}\,\frac{\text{جب}}{\text{جم}}\,(\text{م}+\text{ن}-۴)\,\text{ط} + \ldots$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں۔
نیز ثابت کرو کہ

$$(\text{ف}+۲)\,ا_{\text{ف}+۲} + (\text{م}-\text{ن})\,ا_{\text{ف}+۱} + (\text{م}+\text{ن}-\text{ف})\,ا_{\text{ف}} = ۰$$

سوائے سلسلہ کی آخری رقموں کی صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت ہوتے ہیں۔

۳۲ — ایک دائرہ کے محیط کو جسکا مرکز د ہے ن مساوی حصوں میں نقطوں ف$_{۱}$، ف$_{۲}$، ... ، ف$_{\text{ن}}$ پر تقسیم کیا گیا ہے اور ق کوئی اندرونی

نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{س ف}_{1}\text{ق و} + \text{س ف}_{2}\text{ق و} + \dots + \text{س ف}_{\text{ن}}\text{ق و} = \text{ن س فَ قَ و}$$

جہاں فَ، دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا کہ قَ و فَ = ن × ق و ف$_{1}$، اور ق و پر قَ ایک نقطہ ہے ایسا کہ (اگر معین ق ر، قَ رَ، دائرہ کو ر، رَ میں قطع کریں) قَ و رَ = ن × ق و ر ۔

۳۳ ــ اگر م$_{1}$، م$_{2}$، ...، م$_{\text{س}}$ وہ صحیح عدد ہوں جو م سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں اور اگر م کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ف$_{1}$، ف$_{2}$، ... ہوں تو ثابت کرو کہ (383)

$$\prod_{1}^{\text{س}} \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{م}_{\text{ر}}\pi}{\text{م}}\right) = \frac{\text{جب م ط} \times \prod \text{جب}\frac{\text{م ط}}{\text{ف}_{1}\text{ف}_{2}} \times \prod \text{جب}\frac{\text{م ط}}{\text{ف}_{1}\text{ف}_{2}\text{ف}_{3}\text{ف}_{4}} \dots}{\prod_{2}^{\text{س}} \text{جب}\frac{\text{م ط}}{\text{ف}_{1}} \times \prod \text{جب}\frac{\text{م ط}}{\text{ف}_{1}\text{ف}_{2}\text{ف}_{3}} \dots}$$

۳۴ ــ ف، ق، ر کی سب مثبت صحیح عددی قیمتوں کے لئے جو ہیں ایسی کہ ف + ق + ر = س جبکہ س $\geq$ ۳ ثابت کرو کہ حاصل ضربوں جب ف ع جب ق $\left(\text{ع} + \frac{2\pi}{3}\right)$ جب ر $\left(\text{ع} + \frac{4\pi}{3}\right)$ کا مجموعہ صفر ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ س، ۳ کا ضعف ہو اور

یہ مجموعہ - $\frac{۱}{۴}$ جب س ع ہے جبکہ س، ۳ کا ایک ضعف ہو -

۳۵ - اگر لا = مس ۲ ط تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۴} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۸} - \frac{۵}{۶۴}\,\text{لا}^{۶} + \cdots\right\}،$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{۳}{۸}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۳۱}{۱۲۸}\,\text{لا}^{۴} - \frac{۱۸۷}{۱۰۲۴}\,\text{لا}^{۶} + \cdots\right\}،$$

$$۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\,\text{ط} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{۱۱}{۳۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۴۳۱}{۲۰۴۸}\,\text{لا}^{۴} - \cdots\right\}$$

تمت

بالخیر

اصطلاحات

علم مثلث مستوی

English	Urdu
Absolutely convergent	مطلقاً مستدق
Ambiguity of sign	علامت کا ابہام
Ambiguous sign	مبہم علامت
Analytical	تحلیلی
Argument	دلیل، وجہ
Base	اساس، قاعدہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circle of convergence	استدقاق کا دائرہ
Circular functions	دائری تفاعل
Circular measure	دائری ناپ
Circum-circle	حائط دائرہ، بیرونی دائرہ
Circumscribed polygon	حائط کثیر الاضلاع
Complex number	ملتف عدد
Complex variable	ملتف متغیر
Conditionally convergent	مشروطاً مستدق
Continuous functions	مسلسل تفاعل

Convergence	اِستدقاق
Coterminal angles	ہم اختتامی زاویے
Depression (angle of)	(زاویہ) نشیب
Doubly periodic	دو دَوری
Elevation	ارتفاع
Escribed circles	جانبی دائرے
Even functions	جفت تفاعل
Exponential functions	قوت نمائی تفاعل
Exponential series	قوت نمائی سلسلہ
External bisectors	خارجی ناصف
Generalized logarithms	تعمیمی لوکارتم
Grades	مرتبے
Hyperbolic functions	زائدی تفاعل
Hyperbolic cosine (cosh)	زائدی جیب التمام (جمز)
Hyperbolic sine (sinh)	زائدی جیب (جیز)
Hyperbolic tangent (tanh)	زائدی مماس (مسز)
Hyperbolic cotangent (coth)	زائدی مماس التمام (ممز)
Hyperbolic secant (sech)	زائدی قاطع (قطز)
Hyperbolic cosecant (cosech)	زائدی قاطع التمام (قمز)
Hypergeometric series	علوی ہندسی سلسلہ
Identity	متماثلہ
In-circle	اندرونی دائرہ
Inequality	لامساوی
Infinite products	لامتناہی حاصل ضرب
Infinite series	لامتناہی سلسلہ

Inscribed polygon	اندرونی کثیر الاضلاع
Integral values	صحیح عددی قیمتیں
Internal bisectors	اندرونی ناصف
Inverse circular functions	مقلوب دائری تفاعل
Irrational	غیر منطق
Lateral	جانبی
Limit	انتہا
Limits	حدود
Maximum	اعظم
Minimum	اقل
Minute	دقیقہ
Modulus	مقیاس
Multiple angles	ضعفی زاویے
Natural circular functions	طبعی دائری تفاعل
Natural logarithms	طبعی لوکارتم
Necessary and sufficient condition	ضروری اور کافی شرط
Nine-point circle	نو نقطی دائرہ
Oblique-angled triangle	غیر قائم الزاویہ مثلث
Odd functions	طاق تفاعل
Orthocentre	مرکز عمودی
Parallelepiped	متوازی السطوح
Partial fractions	جزوی کسور
Pedal line	خط پائین
Pedal triangle	مثلث پائین
Period	دور

Periodicity	دوریت
Porismatic systems	استنباطی نظام
Principal value	صدر قیمت
Projection	ظِل
Quadrature of the circle	دائرہ کی تربیع
Radian	نیم قطری
Raduis of convergence	استدقاق کا نصف قطر
Raduis vector	سمتی نیم قطر
Real variable	حقیقی متغیر
Regular polygon	منتظم کثیر الاضلاع
Second	ثانیہ
Sector	قطاع
Sequence	تواتر
Semi-convergent	نیم مستدق
Sexagesimal system	ستینی نظام
Singly periodic	یک دوری
Submultiple angles	تحت ضِعفی زاوے
Sum-functions	مجموعہ تفاعل
Symmetrical functions	متشاکل تفاعل
Transcendental number	علوی عدد
Trigonometrical functions	مثلثی تفاعل
Uniform convergence	یکساں استدقاق